PERSONAL - Einführung in die Theoretische Informatik

- Grundlagen
  - Operationen auf Sprachen
    - Bonus: Beweisrezepte
  - Rechenregeln für Operationen auf Sprachen
- Grammatiken
  - Chomsky-Hierarchie
- DFAs und NFAs
- Reguläre Ausdrücke
  - Rechenregeln und Abschlusseigenschaften für RegEx
  - Pumping-Lemma (reg. Sprachen)
  - Entscheidungsverfahren
  - Minimierung eines DFAs, Äquivalenz von Wörtern
  - Wichtige (nicht-)reguläre Sprachen
- Überblick: Konversionen
- Kontextfreie Sprachen, Grammatiken
  - Induktionsprinzip
  - Syntaxbäume
  - Chomsky-Normalform, Greibach-Normalform
  - Pumping-Lemma (CFL)
    - Konstruktion einer Chomsky-Normalform
  - Abschlusseigenschaften für CFGs / CFLs
  - Algorithmen für CFGs
- Wichtige CFLs und CFGs
- Kellerautomaten
- Überblick: Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeit
  - Abschlusseigenschaften
  - Entscheidbarkeit (DFA / NFA)
  - Entscheidbarkeit (DFA / PDA / CFG)

- Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit
  - (Über-)Abzählbarkeit
  - Turingmaschinen
  - WHILE- und GOTO-Programme
  - Entscheidbarkeit
    - Wichtige Unentscheidbare Probleme
  - Reduktionen
  - Semi-Entscheidbarkeit / Rekursive Aufzählbarkeit
  - Das Postsche Korrespondenzproblem
- Überblick: Klassen von Funktionen
- Komplexitätstheorie
  - Komplexitätsklassen P und NP
    - Wichtige Probleme in P
  - Polyzeitreduktion, NP-Vollständigkeit
    - Wichtige NP-vollständige Probleme
  - Aussagenlogik

Grundlagen

- **Alphabet** Σ: endliche Menge von *Symbolen* (z.B. $\{0, 1\}$)
- **Wort / String über ein Alphabet** Σ: endliche *Verkettung* von Symbolen aus Σ (z.B. 010)
  - **Länge eines Wortes** w: $|w|$
  - **leere Wort**: ϵ (Länge 0)
  - **Konkatenation zweier Wörter** u **und** v: das Wort uv
    - das leere Wort ϵ konkateniert mit jedem anderen Wort w ergibt w
    - **formal**: $w^n : \begin{cases} w^0 = \epsilon \\ w^{n+1} = ww^n \end{cases}$ (z.B. $(ab)^3 = ababab$)
  - **Menge *aller* Wörter über ein Alphabet** Σ: Σ^*
- **(formale) Sprache** L: *Menge von Wörtern* über ein Alphabet
  - **formal**: $L \subseteq \Sigma^*$
  - $\emptyset$ ist eine Sprache mit 0 Wörtern
  - $\{\epsilon\}$ ist eine Sprache mit einem Wort, dem leeren Wort
  - **Bemerkung**: $\{ab\} \neq ab$ (Sprache vs. Wort)

Operationen auf Sprachen

- **Konkatenation**: die *Menge* aller Wörter der Gestalt uv, wobei u ein Wort aus der Sprache A und v ein Wort aus der Sprache B ist
  - **formal**: $AB = \{uv \mid u \in A \land v \in B\}$
  - **Beispiel**: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
- **"Selbstkonkatenation", n-malig**: die Konkatenation von A mit sich selbst, n mal
  - **formal**: $A^n = \{w_1, ..., w_n \mid w_1, ..., w_n \in A\} = A...A$
    - die Menge mit dem leeren Wort $\{\epsilon\}$ konkateniert mit jeder anderen Sprache A ergibt A
  - **formal, rekursiv**: $\begin{cases} A^0 = \{\epsilon\} \\ A^{n+1} = AA^n \end{cases}$
  - **Beispiel**: $\{ab, ba\}^2 = \{ab, ba\}\{ab, ba\} = \{abab, abba, baab, baba\}$
- **Kleenesche Hülle**: die Menge aller Wörter, die durch beliebige Konkatenation von Wörtern der Sprache A gebildet werden können (*immer inkl. leeres Wort!*)
  - **formal**: $A^* = \{w_1, ..., w_n \mid n \geq 0 \land w_1, ..., w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup ...$
  - **(!)**: $\forall A : \epsilon \in A^*$
  - **(!)**: $\emptyset^* = \{\epsilon\}$
  - **Beispiel**: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, ...\}$
    - **Bemerkung**: $\{01\}^* \neq \{0, 1\}^*$
- **positive Hülle**: die Menge aller Wörter, die durch beliebige Konkatenation von Wörtern der Sprache A gebildet werden können, die *nur dann* das leere Wort enthalten, wenn das leere Wort selbst Element der Sprache ist
  - **formal**: $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n = A^1 \cup A^2 \cup ...$
- **(*) kartesisches Produkt**: nicht explizit eine Operation auf Sprachen, aber da die Sprachen A, B selber Mengen sind, geht es auch hier
  - **Beispiel**: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$

Bonus: Beweisrezepte

- $X \subseteq Y$?
  - sei $w \in X \implies ... \implies w \in Y$
- *irgendwas* $\implies X \subseteq Y$?
  - Annahme: *irgendwas*
  - sei $w \in X \implies ... \implies$ (Annahme) ... $\implies ... \implies w \in Y$
- $X = Y$?
  - zeige $X \subseteq Y$, dann $Y \subseteq X$ getrennt

Rechenregeln für Operationen auf Sprachen

- $\emptyset A = \emptyset$ (die Konkatenation der leeren Menge mit jeder anderen Sprache ist $\emptyset$)
- $\{\epsilon\}A = A$ (die Konkatenation einer Sprache, die nur die leere Menge enthält, mit jeder anderen Sprache A ergibt A)
- $A(B \cup C) = AB \cup AC$ bzw. $(A \cup B)C = AC \cup BC$
  - **(!)** idR gilt $A(B \cap C) = AB \cap AC$ nicht
- $A^*A^* = A^*$

Grammatiken

- **Grammatik**: 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$
  - **Vokabular** V: endliche Menge von **Nichtterminalzeichen** (konv. großgeschrieben)
  - **Alphabet** Σ: endliche Menge von **Terminalzeichen** (konv. kleingeschrieben), disjunkt von V
  - **Produktionsmenge** $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$: endliche Menge von **Produktionsregeln**
  - **Startsymbol** $S \in V$
- **Ableitung**: der Vorgang, ein Wort nach den Regeln einer formalen Grammatik zu erzeugen
  - **formal**: $\alpha_1 \to_G \alpha_2 \to_G \ldots \to_G \alpha_n$ ("α_n aus α_1 gebildet")
  - wenn $\alpha_1 = S$ (die erste Konstruktion das Startsymbol ist) und $\alpha_n \in \Sigma^*$ (die letzte Konstruktion nur aus Terminalzeichen besteht), dann **erzeugt** die Grammatik G das Wort α_n
  - $L(G)$: **Sprache** von G; die Menge aller Wörter, die von G erzeugt werden
    - **formal**: $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \to_G^* w\}$ (die Sprache besteht nur aus Terminalzeichen und kann von S nach n Schritten erzeugt werden)
    - um zu beweisen, dass eine Grammatik eine Sprache *nicht* erzeugt, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden (also ein Wort, welches von der Grammatik erzeugt werden kann, aber *nicht* in der Sprache enthalten ist)
- eine Grammatik G induziert eine **Ableitungsrelation** $\to_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$
  - **formal**: $\alpha \to_G \alpha' \iff \beta \to \beta' \in P \land \exists \alpha_1, \alpha_2 : \alpha = \alpha_1\beta\alpha_2 \land \alpha' = \alpha_1\beta'\alpha_2$
    - $\alpha \to_G^0 \alpha$
    - $\alpha \to_G^{n+1} \gamma \iff \exists \beta : \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$ (man kann nach $n+1$ Schritten von α ausgehend γ erreichen)
    - $\alpha \to_G^* \beta \iff \exists n : \alpha \to_G^n \beta$ (β ist aus α erreichbar)
    - $\alpha \to_G^+ \beta \iff \exists n > 0 : \alpha \to_G^n \beta$ (β ist aus α *nach mindestens einem Schritt* erreichbar)
  - **Beispiel**: $a + \underline{\langle \text{Term} \rangle} + b \to_G a + \underline{\langle \text{Term} \rangle \cdot \langle \text{Factor} \rangle} + b$
- **(!)** Grammatiken mit invaliden Produktionen erzeugen die leere Sprache
  - **Beispiel**: $S \to aS \mid bS \implies L(G) = \emptyset$

Chomsky-Hierarchie

- Chomsky-Hierarchie: Hierarchie von Klassen formaler Grammatiken, die formale Sprachen erzeugen
  - Typ 0 (Phasenstrukturgrammatik): *alle* Grammatiken
    - **Sprachenklasse**: rekursiv aufzählbare Sprachen (Sprachen, die von einer Turingmaschine akzeptiert werden können)
  - Typ 1 (kontextsensitive Grammatik): Typ 0 Grammatiken, wobei jede Produktion länger und länger wird
    - **formal**: für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
    - **Sprachklasse**: kontextsensitive Sprachen
  - Typ 2 (kontextfreie Grammatik): Typ 1 Grammatiken, wobei die linke Seite nur ein nichtterminales Symbol enthält
    - **formal**: G ist vom Typ 1 und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt $\alpha \in V$
    - **Sprachklasse**: kontextfreie Sprachen
  - Typ 3 (rechtslineare / reguläre Grammatik): Typ 2 Grammatiken, bei denen auf der rechten Seite von Produktionen genau ein Terminalsymbol auftreten darf und *maximal ein* weiteres Nichtterminalsymbol
    - **formal**: G ist vom Typ 2 und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$
      - **anders**: rechte Seite hat entweder die Form $X \to a$ oder $X \to bY$
    - **Sprachklasse**: reguläre Sprachen
- **(!)**: $L(\text{Typ}_3) \subseteq L(\text{Typ}_2) \subseteq L(\text{Typ}_1) \subseteq L(\text{Typ}_0)$

Typ	Grammatik	Maschinen
Typ-0	Beliebige Grammatiken	Turing-Maschinen (DTM, NTM, k-Band-DTM...)
Typ-1	Monotone Grammatiken	Linear-Beschränkte Automaten (NTM mit beschr. Band)
Typ-2	Kontextfreie Grammatiken	Kellerautomaten (PDA)
Typ-3	Rechtslineare Grammatiken	Endliche Automaten (DFA, NFA, ϵ-NFA...), RegEx

DFAs und NFAs

- deterministischer endlicher Automat (DFA): ein endlicher Automat, der unter Eingabe eines Zeichens seines Eingabealphabetes (den möglichen Eingaben) **von einem Zustand**, in dem er sich befindet, **in einen eindeutig bestimmten Folgezustand** wechselt
  - **formal**: Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit...
    - ...einer **endlichen Menge von Zuständen** Q

        - ...einem *endlichen* **Eingabealphabet** Σ (Menge erlaubter Eingabesymbole)
        - ...einer *totalen* **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (ordnet jedem Paar bestehend aus einem Zustand $q \in Q$ und einem Eingabesymbol $a \in \Sigma$ einen Nachfolgezustand $p \in Q$ zu)
            - **anders**: von jedem Zustand aus jedes Symbol kommt genau 1 mal vor!
        - ...einem **Startzustand** $q_0 \in Q$
        - ...einer **Menge von Endzuständen (akzeptierenden Zuständen)** $F \subseteq Q$
    - $L(M)$: **von M akzeptierte Sprache**
        - **formal**: $L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$
            - $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ definiert als $\begin{cases} \hat{\delta}(q, \epsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w) \text{ für } a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{cases}$
                - **Beispiel**: $\hat{\delta}(q_0, aaba) = \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), a), b), a)$
            - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$
            - $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$
- [nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA)]: ein endlicher Automat, bei dem es für den Zustandsübergang *mehrere gleichwertige Möglichkeiten* gibt
    - **formal**: Quintupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit...
        - ...Q, Σ, q_0, F wie bei einem DFA
        - ...einer **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ mit $\mathcal{P}(Q)$ die Menge aller Teilmengen von Q
            - $\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$
            - $\hat{\overline{\delta}} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ (die Menge aller Zustände, die sich von einem Zustand in S aus mit w erreichen lassen)
    - $L(N)$: **von N akzeptierte Sprache**
        - **formal**: $L(N) := \{w \in \Sigma^* | \hat{\overline{\delta}}(\{q_0\}, w) \cap F \neq 0\}$
        - **anders**: ein NFA akzeptiert ein Wort, wenn es *irgendein* Pfad zu einem Endzustand gibt
    - **NFA mit ϵ-Übergängen**: NFA mit speziellem Symbol $\epsilon \notin \Sigma$ und $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
        - ein ϵ-Übergang kann ausgeführt werden, ohne ein Eingabezeichen zu lesen
        - für jeden ϵ-NFA gibt es einen zugehörigen NFA, der die selbe Sprache akzeptiert (3.16)
    - **(*)** jeder NFA ist ein DFA
- **(!)** [reguläre / erkennbare Sprache]: formale Sprache, die u.a. von endlichen Automaten erkannt wird
    - Sprache, die von einem *endlichen Automaten* akzeptiert wird
    - Sprache, die von einer *regulären / rechtslinearen Grammatik (Typ 3)* erzeugt wird

    - Sprache, die durch einen *regulären Ausdruck* dargestellt werden kann
    - Sprache, die *endlich viele Residualsprachen* hat
- **(!) von rechtslinearen Grammatiken zu DFAs**:
    - für jede rechtslineare Grammatik G gibt es einen DFA M mit $L(M) = L(G)$
    - für jeden DFA M gibt es eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L(M)$
- **(!) Zwischenschritt NFAs...**:
    - für jede rechtslineare Grammatik G gibt es einen NFA N mit $L(N) = L(G)$
        - *Slide 40, 3.9*: erstelle für jedes Nichtterminalzeichen einen Zustand und verbinde diese entsp. den Produktionen; erstelle besonderen Endzustand für Terminalzeichen; wandle Zustände in Endzustände um für ϵ-Produktionen
    - für jeden NFA N gibt es einen DFA M mit $L(M) = L(N)$
        - *Slide 43, 3.10*: Potenzmengenkonstruktion
    - für jeden DFA M gibt es eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L(M)$
- **(!) alle Automatentypen erkennen die Sprachen der Grammatiken mit Produktionen der Art**:
    - $X \to aY$
    - $X \to a$
    - $X \to Y$
    - $X \to \epsilon$
    - **anders**: ϵ-NFAs, NFAs und DFAs (und RegEx) sind **gleichmächtig**

Reguläre Ausdrücke

- **regulärer Ausdruck (RegEx)**: eine **Zeichenkette**, die der Beschreibung von Mengen von Zeichenketten mit Hilfe bestimmter syntaktischer Regeln dient
    - alternative Notation für die Definition von formalen Sprachen
    - $\emptyset, \epsilon$ sind *reguläre Ausdrücke*
    - für jedes Zeichen a der Zeichenmenge Σ ist a ein *regulärer Ausdruck*
    - sind x, y reguläre Ausdrücke, dann auch...
        - **Alternative**: $(x|y)$ oder $(x + y)$
        - **Verkettung**: (xy) oder $(x \cdot y)$
        - **Kleene-Stern**: (x^*)
    - **Bindungsstärke**: $^* > \cdot > |$
- **Sprachen der regulären Ausdrücke**:
    - $L(\emptyset) = \emptyset$ (Symbol für leere Menge spezifiziert leere Sprache)
    - $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$

- $L(a) = \{a\}$
- $L(xy) = L(x)L(y) = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L(x) \land \beta \in L(y)\}$
- $L(x|y) = L(x) \cup L(y)$
- $L(x^*) = L(x)^* = \{\alpha_1 ... \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_1, ... \alpha_n \in L(x)\}$

- **Ardens Lemma**: sind α, β, X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt $X \equiv \alpha X|\beta \implies X \equiv \alpha^*\beta$
- **Äquivalenz**: zwei RegEx sind äquivalent gdw. sie die gleiche Sprache darstellen
  - $\alpha \equiv \beta \iff L(\alpha) = L(\beta)$

Rechenregeln und Abschlusseigenschaften für RegEx

- **Rechenregeln für reguläre Ausdrücke**:
  - **Null und Eins**:
    - $\emptyset|\alpha \equiv \alpha|\emptyset \equiv \alpha$
    - $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
    - $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$
    - $\emptyset^* \equiv \epsilon$
    - $\epsilon^* \equiv \epsilon$
  - **Assoziativität**:
    - $(\alpha|\beta)|\gamma \equiv \alpha|(\beta|\gamma)$
    - $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$
  - **Kommutativität**:
    - $\alpha|\beta \equiv \beta|\alpha$
  - **Distributivität**:
    - $\alpha(\beta|\gamma) \equiv \alpha\beta|\alpha\gamma$
    - $(\alpha|\beta)\gamma \equiv \alpha\gamma|\beta\gamma$
  - **Idempotenz**:
    - $\alpha|\alpha \equiv \alpha$
  - **Stern**:
    - $\epsilon|\alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
    - $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
    - $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$
- **Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen**: sind $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ **reguläre Sprachen**, dann auch:
  - R_1R_2 ($\alpha_1\alpha_2$)

  - $R_1 \cup R_2$ ($\alpha_1 \mid \alpha_2$)
  - R^* (α^*)
  - $\overline{R} = \Sigma^* \backslash R$ (DFA: tausche End- und Nichtendzustände)
  - $R_1 \cap R_2$ ($= \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$)
  - $R_1 \backslash R_2$ ($= R_1 \cap \overline{R_2}$)
  - **(!)** Σ^* ist *stets regulär*
- **Produkt-Automat**: DFA, der $L(M_1) \cap L(M_2)$ akzeptiert, mit *gemeinsamen* Zuständen und Übergängen
  - **gegeben**: $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$
  - **dann**: $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$ mit $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$

Pumping-Lemma (reg. Sprachen)

- **Idee**: Wörter ab einer gewissen Länge einer Sprache L kann man *irgendwo in der Mitte aufpumpen*, so dass man *immer noch* ein Wort in der Sprache L erhält
- **Pumping-Lemma für reguläre Sprachen** (zeige, dass eine Sprache *nicht regulär* ist; hinreichend): sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär; dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass:
  - $v \neq \epsilon$ (das Wort v ist nicht leer)
  - $|uv| \leq n$ (die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge n)
  - $\forall i \geq 0 : uv^iw \in R$ (für jede natürliche Zahl i ist das Wort uv^iw in der Sprache R, also $uw, uvw, uvvw, uvvvw ...$)
- **Pumping-Zahl**: das kleinste n, das die Eigenschaften des Pumping-Lemmas erfüllt
- **Tipps**:
  - Wort wählen, das *fast* nicht mehr in der Sprache ist (z.B. wenn man vorne einen *kleinen* Teil auf- oder abpumpt, ist das neue Wort *nicht mehr* in der Sprache)
  - Wort wählen, bei dem die ersten n Symbole gleich sind (leichtere Zerlegung, vermeidet evtl. Fallunterscheidung)
  - skizzieren...
  - gibt es größere Lücken in der Sprache? $\rightarrow$ wenn ja, wähle Wort welches, wenn aufgepumpt, zwischen einem Wort und dem nächsten in der Sprache liegt
  - oft $i = 0$ (wenig abpumpen) bzw. $i = 2$ (wenig aufpumpen)
- **(!) endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen**

Entscheidungsverfahren

- **Wortproblem**: gegeben w (Wort) und D (RegEx, DFA, NFA...), gilt $w \in L(D)$?
  - **DFA** M: entscheidbar in $O(|w| + |M|)$

    - **NFA** N: entscheidbar in $O(|Q|^2|w| + |N|)$
- **Leerheitsproblem**: gegeben D, gilt $L(D) = \emptyset$?
    - **DFA**: entscheidbar in $O(|Q||\Sigma|)$
    - **NFA**: entscheidbar in $O(|Q|^2|\Sigma|)$
- **Endlichkeitsproblem**: gegeben D, ist $L(D)$ endlich?
    - **DFA, NFA**: entscheidbar
- **Äquivalenzproblem**: gegeben D_1, D_2, gilt $L(D_1) = L(D_2)$?
    - **DFA**: entscheidbar in $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$
    - **NFA**: entscheidbar in $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ bei fixem Σ
    - **RegEx**: entscheidbar
- die Kodierung der Eingabe (DFA vs. NFA vs. RE) kann **entscheidend** für die Komplexität eines Problems sein

Minimierung eines DFAs, Äquivalenz von Wörtern

- jede reguläre Sprache hat **einen einzigen minimalen Recognizer**
    - **anders**: der (kanonische) Minimalautomat ist *eindeutig*
- **Unterscheidbarkeit**: Zustände p und q sind *unterscheidbar*, wenn es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\delta(p, w) \in F$ und $\delta(q, w) \notin F$ oder umgekehrt
    - Unterscheidbarkeit pflanzt sich *rückwärts* fort
- **Äquivalenz von Zuständen**: Zustände p und q sind *äquivalent*, wenn sie nicht unterscheidbar sind (i.e. für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F$)
    - $p \equiv_M q \iff L_M(p) = L_M(q)$, wobei $L_M(q) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q, w) \in F\}$
- **Quotientenautomat**: "Kollabierung" von M bzgl. $\equiv$
    - der Quotientenautomat $M/\equiv$ ist ein *minimaler DFA* für $L(M)$
- **Residualsprache von L bzgl. w**: $L^w = \{z \in \Sigma^* \mid wz \in L\}$
    - $L' \subseteq \Sigma^*$ ist Residualsprache von L wenn es w gibt mit $L' = L^w$
- **Äquivalenz von Wörtern**: zwei Wörter sind äquivalent, wenn sie die gleiche Residualsprache haben
    - $u \equiv_L v \iff L^u = L^v$
    - **anders**: $u \equiv_L v \iff \forall w \in \Sigma^*$: uw und vw *beide* in L oder *beide nicht* in L
- **Kanonischer Minimalautomat**: $M_L = (\mathcal{R}_L, \Sigma, \delta_L, L, F_L)$ mit $\delta_L(R, a) = R^a$ und $F_L = \{R \in \mathcal{R}_L \mid \epsilon \in R\}$
    - jeder minimale DFA ist *isomorph* zum kanonischen Minimalautomaten

    - "äquivalente Zustände *zusammenfassen*" $\equiv$ wähle irgendein Zustand aus einer Äquivalenzklasse und schaue, in welche Äquivalenzklasse mit einer Kante gegangen wird...
- **(!) eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn sie endlich viele Residualsprachen hat**

Wichtige (nicht-)reguläre Sprachen

- $\emptyset$ regulär $\implies$ Σ^* regulär
- alle *endlichen* Sprachen $L \subseteq \Sigma^*, |L| \in \mathbb{N}$ sind *regulär*
- alle *kontextfreien* Sprachen über einem *unären Alphabet* sind *regulär*
- die Sprache $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ist *regulär*
- die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist *nicht* regulär
- die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \leq ...\}$ (n begrenzt) sind regulär
- die Sprache $\{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ ist *nicht* regulär
- die Sprache der *wohlgeklammerten Ausdrücke* über dem Alphabet $\{(,)\}$ ist *nicht* regulär
- die Sprache der *arithmetischen Ausdrücke* ist *nicht* regulär
- **BONUS**: $L_k := \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das k-letzte Bit von w ist } 1\} \rightarrow$ jeder DFA M mit $L(M) = L_k$ hat *mindestens* 2^k Zustände

Überblick: Konversionen

- **RE** $\rightarrow$ **ϵ-NFA**: RE der Länge n $\rightsquigarrow$ $O(n)$ Zustände
- **ϵ-NFA** $\rightarrow$ **NFA**: Q $\rightsquigarrow$ Q
- **NFA** $\rightarrow$ **DFA**: n Zustände $\rightsquigarrow$ $O(2^n)$ Zustände
- **NFA** $\rightarrow$ **RE**: n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(3^n)$

Kontextfreie Sprachen, Grammatiken

- **linke Seite *genau eine Variable*, rechte Seite *beliebig***
- **Parsen**: Transformation eines Wortes in einen Syntaxbaum (Überprüfung, ob ein Wort von einer Grammatik abgeleitet werden kann)
- **kontextfreie Grammatik (CFG)**: 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$
    - V: endliche Menge von **Nichtterminalzeichen** (**Variablen**)
    - Σ: Alphabet von **Terminalzeichen** (disjunkt von V)

- P: endliche Menge von **Produktionen**, $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$
- S: **Startsymbol**, $S \in V$

- **reflexiv transitive Hülle**:
  - $a \to_G^0 a$
  - $a \to_G^{n+1} \gamma \iff \exists \beta : \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$
  - $a \to_G^* \beta \iff \exists n : \alpha \to_G^n \beta$
  - $a \to_G^+ \beta \iff \exists n > 0 : \alpha \to_G^n \beta$
- **Linksableitung**: Ableitung $\alpha_1 \to_G \alpha_2 \to_G \ldots \to_G \alpha_n$, wobei in jedem Schritt *das linkeste Nichtterminal* in α_i ersetzt wird
- **kontextfreie Sprache (CFL)**: Sprache, die von einer kontextfreien Grammatik erzeugt wird
  - $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \to_G^* w\}$
  - $L \in \Sigma^*$ kontextfrei $\iff$ G kontextfrei und $L(G) = L$
- **Präfix**: u ist ein Präfix von w, wenn es ein Wort v gibt, so dass die Konkatenation von u mit v das Wort w ergibt
  - **formal**: $u \preceq w \iff \exists v : uv = w$
- **balancierte Klammerausdrücke**: $w \in \{[,]\}^*$ mit $A(w) = \#_[(w) m B(w) = \#_](w)$ ist genau dann balanciert, wenn...
  - $A(w) = B(w)$ (Anz. linke Klammern gleich Anz. rechte Klammern)
  - für alle Präfixe u von w gilt $A(u) \geq B(u)$
  - **intuitiv**: addiere 1 bei linke Klammer, subtrahiere 1 bei rechte Klammer; wenn Zahl irgendwann negativ wird oder am Ende nicht 0 ergibt, ist das Wort invalide bzw. die Klammern sind nicht balanciert

Induktionsprinzip

- **Induktionsprinzip** ($S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$): um zu zeigen, dass für alle *Wörter* $u \in L_G(S)$ eine *Eigenschaft* $P(u)$ gilt, zeige...
  - $P(\epsilon)$ (Basis; die Eigenschaft gilt für das leere Wort)
  - $P(u) \implies P([u])$ (wenn die Eigenschaft für u gilt, dann auch für $[u]$)
  - $P(u) \wedge P(v) \implies P(uv)$ (wenn die Eigenschaft für u und v gilt, dann auch für uv)
- **(!) Strukturelle Induktion (allgemein)**: prüfe jede Produktion!
  - für $A_i \to w_0 A_{i_1} w_1 \ldots w_{n-1} A_{i_n} w_n$:
    - Produktion $\leftrightarrow$ Erzeugungsregel: $u_1 \in L_G(A_{i_1}) \wedge \ldots \wedge u_n \in L_G(A_{i_n}) \implies w_0 u_1 w_1 \ldots u_n w_n \in L_G(A_i)$
    - simultane Induktion über die Erzeugung von u: $P_{i_1}(u_1) \wedge \ldots P_{i_n}(u_n) \implies P_i(w_0 u_1 w_1 \ldots u_n w_n)$

    - **Beispiel**: $A \to \epsilon \mid aB, B \to Aa$
        - $\epsilon \in L_G(A)$
        - $w \in L_G(B) \implies aw \in L_G(A)$
        - $w \in L_G(A) \implies wa \in L_G(B)$
- **Produktion**: top-down (von *Nichtterminal zum Wort*)
- **Induktion**: bottom-up (setze *kleinere Wörter zu größeren* zusammen)
- $w \in L_G(S) \implies P(w)$ beweist man immer mit **Induktion über Erzeugung von** w
- $P(w) \implies w \in L_G(S)$ beweist man oft mit **Induktion über** $|w|$

Syntaxbäume

- **Syntaxbaum**: ein Baum, so dass...
    - jedes Blatt mit einem Zeichen aus Σ oder ϵ beschriftet ist
    - jeder innere Knoten mit einem Nichtterminalzeichen beschriftet ist
    - ein Blatt ϵ der *einzige* Nachfolger seines Vorgängers ist
    - **von links nach rechts**: Produktion
- **(!) äquivalente Bedingungen**:
    - $A \to_G^* w \iff w \in L_G(A) \iff \exists$ Syntaxbaum mit Wurzel A, dessen Blätter von links nach rechts gelesen w ist
- **mehrdeutig**: eine *CFG* heißt *mehrdeutig*, wenn es ein Wort gibt, das zwei verschiedene Syntaxbäume hat
- **inhärent mehrdeutig**: eine *CFL* heißt *inhärent mehrdeutig*, wenn jede erzeugende CFG mehrdeutig ist (es existiert keine eindeutige Grammatik, die die CFL erzeugt)

Chomsky-Normalform, Greibach-Normalform

- Chomsky-Normalform: jede Produktion hat eine der folgenden Formen...
    - $A \to BC$
    - $A \to a$
    - **EXTRA**: $S \to \epsilon$, dann darf S nicht auf der rechten Seite einer Produktion stehen!
- Greibach-Normalform: bei jedem Ableitungsschritt entsteht jeweils genau ein Terminalzeichen
    - **formal**: jede Produktion hat die Form $A \to aA_1...A_n$
- **(!)** zu jeder CFL gibt es eine Grammatik in Chomsky-Normalform (mit $L(G') = L(G) \backslash \{\epsilon\}$)
- **(!)** zu jeder CFG gibt es eine Grammatik in Greibach-Normalform (mit $L(G') = L(G) \backslash \{\epsilon\}$)
- **(!)** zu jeder CFG kann man eine CFG in Chomsky-Normalform konstruieren (mit $L(G') = L(G) \backslash \{\epsilon\}$)

- **(!)** zu jeder CFG kann man eine CFG konstruieren, die keine ϵ-Produktionen enthält (mit $L(G') = L(G) \backslash \{\epsilon\}$)
  - Obermenge $\hat{P}$: sind $B \to \epsilon$ und $A \to \alpha B \beta$ in $\hat{P}$, füge auch $A \to \alpha\beta$ hinzu (rekursiv)
  - definiere neue Grammatik mit Produktionen aus $\hat{P}$ ohne ϵ-Produktionen (überflüssig)
- **Kettenproduktion**: $A \to B$
- **(!)** zu jeder CFG kann man eine CFG konstruieren, die keine Kettenproduktionen enthält (mit $L(G') = L(G)$)
  - Obermenge $\hat{P}$: sind $A \to B$ und $B \to \alpha$ in $\hat{P}$, füge auch $A \to \alpha$ hinzu (iterativ)
  - definiere neue Grammatik mit Produktionen aus $\hat{P}$ ohne Kettenproduktionen (überflüssig)

Pumping-Lemma (CFL)

- **Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen**: für jede kontextfreie Sprache L gibt es ein $n \geq 1$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegen lässt mit...
  - $vx \neq \epsilon$ (mindestens v oder x nichtleer)
  - $|vwx| \leq n$
  - $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$

Konstruktion einer Chomsky-Normalform

1. Für jedes Terminalzeichen a, das in einer rechten Seite der Länge ≥ 2 vorkommt
   1.1. Füge ein neues Nichtterminal A_a hinzu
   1.2. Ersetze a in allen rechten Seiten der Länge ≥ 2 durch A_a
   1.3. Füge $A_a \to a$ zu P hinzu
2. Für jede Produktion der Form $A \to B_1 B_2 ... B_k$ mit $k \geq 3$
   2.1. Ersetze durch $A \to B_1 C_2, C_2 \to B_2 C_3, ..., C_{k-1} \to B_{k-1} B_k$ mit C_i neue Nichtterminale
3. Eliminiere alle ϵ-Produktionen
4. Eliminiere alle Kettenproduktionen

Abschlusseigenschaften für CFGs / CFLs

- seien G_1, G_2 CFLs; dann kann man in *linearer Zeit* weitere CFGs konstruieren...
  - $L(G_1) \cup L(G_2)$
  - $L(G_1) L(G_2)$
  - $(L(G_1))^*$
  - $(L(G_1))^R$
- **(!)** CFLs sind **nicht** unter Schnitt oder Komplement abgeschlossen

Algorithmen für CFGs

- ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist...

    - **nützlich** $\iff$ es eine Ableitung $S \to_G^* w \in \Sigma^*$ gibt, in der das Symbol X vorkommt
    - **erzeugend** $\iff$ es eine Ableitung $X \to_G^* w \in \Sigma^*$ gibt
    - **erreichbar** $\iff$ es eine Ableitung $S \to_G^* \alpha X \beta$ gibt
- **(!)** *nützliche* Symbole sind *erzeugend und erreichbar* (aber nicht immer umgekehrt)
- **Herleitung einer Grammatik, die die selbe Sprache erzeugt und nur nützliche Symbole enthält**:
    1. Aus G: Eliminiere alle *nicht erzeugenden* Symbole $\to G_1$
    2. Aus G_1: Eliminiere alle *unerreichbaren* Symbole $\to G_2$
- **(!) CFGs - entscheidbar / berechenbar**:
    - die *Menge der erzeugenden Symbole* einer CFG ist berechenbar $\implies$ für eine CFG G ist entscheidbar, ob $L(G) = \emptyset$
    - die *Menge der erreichbaren Symbole* einer CFG ist berechenbar
    - das Wortproblem ist für CFGs in $O(|w|^3)$ entscheidbar $\to$ *CYK-Algorithmus*
        - **Idee**: entscheide das Wortproblem für CFGs in *Chomsky-NF*
- **(!) CFGs - nicht entscheidbar**:
    - *Äquivalenz*: $L(G_1) = L(G_2)$
    - *Schnittproblem*: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$
    - *Regularität*
    - *Mehrdeutigkeit*

Wichtige CFLs und CFGs

- die nicht-reguläre Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist *kontextfrei* mit $S \to aSb \mid \epsilon$
- die nicht-reguläre Sprache der Palindrome ($w = w^R$) über $\{a, b\}$ ist *kontextfrei* mit $S \to \epsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$
- die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter
- die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$ ist inhärent mehrdeutig
- die Sprache $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist *nicht* kontextfrei
- die Sprache $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist *nicht* kontextfrei
- die Sprache $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ ist *nicht* deterministisch

Kellerautomaten

- **(nichtdeterministischer) Kellerautomat (PDA)**: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$
    - Q, Σ, q_0, F: wie bei DFAs / NFAs
    - Γ: Kelleralphabet
    - Z_0: unterstes Kellerzeichen

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$
  - $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$: wenn sich M im *Zustand* q befindet, das *Eingabezeichen* a liest und Z das *oberste Kellerzeichen* ist, so kann er im nächsten Schritt in q' *übergehen* und Z mit α *ersetzen*
    - POP: $\alpha = \epsilon$, das oberste Kellerzeichen Z wird *entfernt*
    - PUSH: $\alpha = Z'Z$, das neue Kellerzeichen Z' wird *auf* dem existierenden Keller *gepusht*
    - ϵ-Übergang: $a = \epsilon$, ohne Lesen eines Eingabezeichens
- **Konfiguration eines Kellerautomaten**: (q, w, α)
  - $q \in Q$: momentaner Zustand
  - $w \in \Sigma^*$: noch zu lesender Teil der Eingabe
  - $\alpha \in \Gamma^*$: aktueller Kellerinhalt (oberstes Kellerzeichen ganz links)
- **(!)** eine Konfiguration kann *mehrere Nachfolger* haben
- **binäre Relation** $\to_M$:
  - $(q, aw, Z_\alpha) \to_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$
  - $(q, w, \alpha) \to_M (q', w', \alpha')$: wenn sich M in der Konfiguration (q, w, α) befindet, kann er *in einem Schritt* in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen
- **Akzeptanz mit Endzustand**: $(q, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma)$ für $f \in F, \gamma \in \Gamma^*$ (Eingabewort am Ende überarbeitet, *Endzustand* erreicht, Kellerzustand *beliebig*)
  - $L_F(M) = \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^* : (q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$
- **Akzeptanz mit leerem Keller**: $(q, w, Z_0) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$ für $q \in Q$ (Eingabewort am Ende überarbeitet, Keller *leer*, finaler Zustand *beliebig*)
  - $L_\epsilon(M) = \{w \mid \exists q \in Q : (q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$
- **(!)** Akzeptanz durch Endzustände und leerem Keller *gleichmächtig*
  - zu jedem PDA M kann man in linearer Zeit ein PDA M' konstruieren mit $L_F(M) = L_\epsilon(M')$ (4.49)
    - $(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma) \iff (q_0', w, Z_0') \to_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$
  - zu jedem PDA M kann man in linearer Zeit ein PDA M' konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$ (4.50)
    - $(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma) \iff (q_0', w, Z_0') \to_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$
- **(!)** PDAs und CFGs sind *äquivalent*
  - **CFG $\to$ PDA**: zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$ (4.53)
    - $A \to_G^* u\gamma$ mit Linksableitung $\iff (q, uv, A) \to_M^* (q, v, \gamma)$

    - **PDA $\rightarrow$ CFG**: zu jedem PDA M (leerer Keller) kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$ (4.56)
- **(!)** eine Sprache ist *kontextfrei* gdw. sie von einem *Kellerautomaten* akzeptiert wird
- **deterministischer Kellerautomat (DPDA)**: PDA, wobei für jedem Zustand und jedem obersten Kellerzustand höchstens eine Transition existiert
    - **formal**: $\forall q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma : |\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$
- **deterministische CFL (DCFL)**: CFL, die von einem DPDA akzeptiert wird
    - **(!)** jede *reguläre Sprache* ist eine *DCFL*
- **Präfixbedingung**: eine Sprache enthält *keine zwei Wörter*, so dass das eine ein *echtes Präfix* des anderen ist
    - $\exists$ DPDA $M : L = L_\epsilon(M) \iff \exists$ DPDA $M : L = L_F(M)$ und L erfüllt die Präfixbedingung (*für eine Sprache* L)
- **(!)** die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen $\implies$ DCFLs sind eine *echte* Teilklasse der CFLs
- **(!)** die Klasse der DCFLs ist *weder unter Schnitt, noch unter Vereinigung* abgeschlossen
- **(!)** jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig (wird also von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt)
- **(!)** das Wortproblem ist für DCFLs *in linearer Zeit entscheidbar*
- **(!)** der *Schnitt* einer *kontextfreien* Sprache mit einer *regulären* Sprache ist *kontextfrei*

Überblick: Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeit

Abschlusseigenschaften

	Schnitt $\cap$	**Vereinigung** $\cup$	**Komplement** $\neg$	**Produkt** $\cdot$	**Stern** *
Regulär (T3)	✔	✔	✔	✔	✔
DCFL (T2)	✘	✘	✔	✘	✘
CFL (T2)	✘	✔	✘	✔	✔
s-e. (T0)	✔	✔	✔	✘	✔

Entscheidbarkeit (DFA / NFA)

	Wortproblem	Leerheitsproblem	Endlichkeitsproblem	Äquivalenzproblem
DFA	$O(\|w\| + \|M\|)$	$O(\|Q\|\|\Sigma\|)$	✔	$O(\|Q_1\|\|Q_2\|\|\Sigma\|)$
NFA	$O(\|Q\|^2\|w\| + \|N\|)$	$O(\|Q\|^2\|\Sigma\|)$	✔	$O(2^{\|Q_1\|+\|Q_2\|})$

Entscheidbarkeit (DFA / PDA / CFG)

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$O(n)$	✔	✔	✔
DPDA	$O(n)$	✔	✔	✘
CFG	$O(n^3)$	✔	✘	✘

Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit

- **allgemein**: man kann jedes Objekt als String oder Zahl kodieren
- **Berechenbarkeit**: welche Funktionen, die einen String nehmen und einen String zurückgeben / die eine natürliche Zahl nehmen und eine natürliche Zahl zurückgeben, sind berechenbar?
  - **intuitiv berechenbar**: es gibt ein Algorithmus, der für eine Eingabe $(n_1, ..., n_k)$ *nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis* $f(n_1, ..., n_k)$ *hält*, falls f definiert ist, sonst *nicht terminiert*
  - **hier**: $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (Strings können als Zahlen kodiert werden, deshalb hier nur $\mathbb{N}$)
- **Church-Turing-These**: die *intuitiv berechenbaren* Funktionen sind genau die Funktionen, die eine *Turing-Machine* berechnen kann
  - **(!)** Turing-Machinen, WHILE-Programme, Registermachinen, High-Level-Programmiersprachen etc. sind *alle gleichmächtig*
- **Funktionen-Terminologie**: eine Funktion $f : A \to B$ ist...
  - **total**: $f(a)$ ist für *alle* $a \in A$ definiert
  - **partiell**: $f(a)$ kann auch undefiniert sein
  - **echt partiell**: $f(a)$ ist *nicht total*

(Über-)Abzählbarkeit

- eine Menge M ist *abzählbar*, falls... (alle Def. äquivalent)
  - $\exists$ *injektive* Funktion $M \to \mathbb{N}$
  - $\exists$ *Bijektion* $M \to \{0, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $\exists$ *Bijektion* $M \to \mathbb{N}$

    - $\exists$ *Nummerierung* der Elemente von M
- eine Menge M ist *überabzählbar*, falls sie *nicht abzählbar* ist
- **(!)** Σ endlich $\implies$ Σ^* abzählbar $\implies$ die Menge der Algorithmen ist abzählbar
- **(!)** die Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ist *überabzählbar* (Cantors Diagonalargument...)
- **(!)** es gibt nicht-berechenbare Funktionen $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (*abzählbar* viele Algorithmen, *überabzählbare* viele Funktionen in $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$)
    - **anders**: wenn Algorithmen als *endliche Wörter* kodiert werden können (vgl. Kodierung von TM), dann gibt es *unberechenbare Funktionen* $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$

Turingmaschinen

- **Turingmaschine (TM)**: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$
    - Q: endliche Menge von *Zuständen*
    - Σ: endliche Menge des *Eingabealphabets*
    - Γ: endliche Menge des *Bandalphabets*, $\Sigma \subset \Gamma$
    - $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$: *Übergangsfunktion*
        - δ darf *partiell* sein (i.e. $\delta(q, a)$ ist nicht definiert für alle $q \in F, a \in \Gamma$)
        - $L, R, N \equiv$ left, right, nothing (Bewegung des Pointers der Turingmachine)
        - **für NTMs (nichtdeterministische TMs)**: $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$
        - **Bedeutung** $\delta(q, a) = (q', b, D)$: wenn sich M im Zustand q befindet und auf dem Band a liest...
            - geht M im nächsten Schritt in den Zustand q' über...
            - überschreibt a mit b...
            - bewegt den Schreib- / Lesekopf in der Richtung von D (left, right, nothing)
    - $q_0 \in Q$: *Startzustand*
    - $\square \in \Gamma \backslash \Sigma$: *Leerzeichen*
    - $F \subseteq Q$: Menge der *akzeptierenden Zustände / Endzustände*
        - **für NTMs**: eine NTM hält, wenn es *mind. einen Weg* zu einem akzeptierenden Zustand gibt (mind. ein Weg, das Wort zu akzeptieren)
            - **intuitiv**: die NTM rät den richtigen Weg
- **Konfiguration einer Turingmaschine**: $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$
    - α: was vorher auf dem Band ist
    - q: aktueller Zustand
    - β: was nachher auf dem Band kommt (beginnend mit dem Zeichen, worauf der Pointer zeigt)
- **Relation** $\to_M$: falls $\delta(q, \text{first}(\beta)) = (q', c, D)$... (formal)

- $(\alpha, q, \beta) \to_M \begin{cases} (\alpha, q', c\,\text{rest}(\beta)) & \text{falls } D = N \\ (\alpha c, q', \text{rest}(\beta)) & \text{falls } D = R \\ (\text{butlast}(\alpha), q', \text{last}(\alpha)\ c\,\text{rest}(\beta)) & \text{falls } D = L \end{cases}$
- für $a \in \Gamma, w \in \Gamma^*$:
  - $\text{first}(aw) = a, \text{first}(\epsilon) = \square$
  - $\text{rest}(aw) = w, \text{rest}(\epsilon) = \epsilon$
  - $\text{last}(wa) = a, \text{last}(\epsilon) = \square$
  - $\text{butlast}(wa) = w, \text{butlast}(\epsilon) = \epsilon$
- M nichtdeterministisch $\implies \delta(q, \text{first}(\beta)) \ni (q', c, D)$

- **von TM akzeptierte Sprachen**: die TM erreicht irgendwann einen *Endzustand* und *hält*
  - **formal**: $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \alpha \in \Gamma^*, \beta \in \Gamma^* : (\epsilon, q_0, w) \to_M^* (\alpha, q, \beta)\}$
  - **(!)** TM akzeptieren genau *Typ-0-Sprachen* (alle, die von Grammatiken erzeugt werden)
- **Turing-Berechenbarkeit**: eine Funktion heißt *Turing-berechenbar* gdw. *sie von einer TM berechnet werden kann*
  - **formal (Zahlen)**: $f(n_1, ...n_k) = m \iff \exists r \in F : (\epsilon, q_0, \text{bin}(n_1)\#...\#\text{bin}(n_k)) \to_M^* (...\square, r, \text{bin}(m)\square...)$
  - **formal (Strings)**: $f(u) = v \iff \exists r \in F : (\epsilon, q_0, u) \to_M^* (...\square, r, v\square...)$
- **Halten einer TM**: eine TM hält, wenn...
  - ...sie eine Konfiguration $(\alpha, q, a\beta)$ erreicht und $\delta(q, a)$ nicht definiert ist
  - ...sie eine Konfiguration $(\alpha, q, a\beta)$ erreicht und $\delta(q, a) = \emptyset$ (NTM)
  - ...sie einen *Endzustand* erreicht $\implies$ die von einer TM berechneten Funktion ist *wohldefiniert*
- **(!)** zu jeder NTM N gibt es eine DTM M mit $L(N) = L(M)$
- **k-Band-Turingmaschine (Mehrband-Turingmaschine)**: TM mit k Bänder und k Köpfe (1 Kopf pro Band)
  - **Startkonfiguration**: Eingabe nur auf dem ersten Band; alle anderen *leer*
  - $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$
  - **(!)** die k Köpfe sind unabhängig voneinander
  - **(!)** jede k-Band-TM kann durch eine 1-Band-TM simuliert werden (n Schritte in $M \to O(n^2)$ Schritte in M')

WHILE- und GOTO-Programme

- **WHILE-Programme**: Programme mit `WHILE`, `IF`, `ELSE`, `DO`, `END`, `:=`, `+`, `-`, `;`, `≠`, Variablen $x_1, x_2...$, Konstanten $c \in \mathbb{N}$
  - berechnet Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
  - *keine* negativen Zahlen $\to$ negative Ergebnisse werden auf 0 *aufgerundet*

    - `WHILE`-Bedingung *immer* $x_i \neq 0$
    - `IF`-Bedingung *immer* $x_i = 0$
    - zu Beginn sind alle *Eingaben* in $x_1, ...x_k$ für $\mathbb{N}^k$, sonst sind *alle* Variablen 0
    - *Rückgabewert* liegt in x_0
    - mit syntaktischem Zucker geht auch die Addition von Variablen miteinander, Multiplikation, Division, Modulo...
    - **(!)** eine *totale* Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist WHILE-berechenbar gdw. es ein WHILE-Programm gibt, so dass es für alle Eingaben $n_1, ...n_k$ in $x_1, ..., x_k$ mit $f(n_1, ..., n_k)$ in x_0 *terminiert*
    - **(!)** eine *partielle* Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist WHILE-berechenbar gdw. es ein WHILE-Programm gibt, so dass es sich im definierten Fall *wie oben* verhält, sonst *terminiert es nicht* (wenn $f(n_1, ...n_k)$ für die Eingabe undefiniert ist)
    - **(!)** jede *WHILE-berechenbare* Funktion ist auch *Turing-berechenbar*
    - **(!)** jedes WHILE-Programm ist zu einem WHILE-Programm *mit genau einer WHILE-Schleife* äquivalent
- **GOTO-Programme**: Sequenz von *markierten Anweisungen* mit `GOTO ...`, `IF ... GOTO ...` (diesmal $X_i = n$ erlaubt) und `HALT`
    - **(!)** jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm simuliert werden
    - **(!)** jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden
- **(!)** jede TM kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden (linker / rechter Bandinhalt und Zustand q als Zahlen kodiert... 5.27)

Entscheidbarkeit

- **Entscheidbarkeit**: eine Mengeneigenschaft heißt *entscheidbar / rekursiv / rekursiv ableitbar*, wenn es ein Algorithmus gibt, der für *jedes* Element der Menge *in endlicher Zeit* korrekt beantworten kann, *ob es die Eigenschaft hat oder nicht*; wenn kein solches Entscheidungsverfahren existiert, nennt man die Eigenschaft *unentscheidbar*
    - **formal**: eine *Teilmenge* einer *abzählbaren* Menge $T \subseteq M$ heißt entscheidbar, wenn ihre *charakteristische Funktion* $\chi_T : M \to \{0, 1\}$ berechenbar ist
        - $\chi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
    - **formal, anders**: sei $L \subseteq \Sigma^*$ mit Eingabe $w \in \Sigma^* \implies w \in L$?
        - L entscheidbar $\iff \exists$ DTM M mit $L(M) = L$, die auf *jeder Eingabe* terminiert $\iff \exists$ DTM M:
            - $\forall w \in L : M$ *terminiert und akzeptiert*
            - $\forall w \notin L : M$ *terminiert und verwirft* (also $w \in \Sigma^* \backslash L$)
    - **formal, nochmal anders**: Eigenschaft $P(x)$ entscheidbar $\iff \{x \mid P(x)\}$ entscheidbar

    - **(!)** die entscheidbaren Mengen sind *abgeschlossen unter Komplement*
        - A entscheidbar $\implies$ $\overline{A}$ entscheidbar
        - A unentscheidbar $\implies$ $\overline{A}$ unentscheidbar
- **TM-Kodierungsnotation**:
    - M_w: Kodierung von M durch w
    - $M[w]$: Maschine M mit Eingabe w
    - $M[w]\downarrow$: $M[w]$ terminiert / hält
- **(!)** *Kodierungsweise irrelevant*; ob jetzt 0en und 1en mit #s oder eine andere Kodierung verwendet wird, ändert *nicht* die Entscheidbarkeit eines Problems

Wichtige Unentscheidbare Probleme

- **spezielles Halteproblem**: $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w]\downarrow\}$ (gegeben ein Wort w, hält M_w bei Eingabe w?)
- **allgemeines Halteproblem**: $H = \{w\#x \mid M_w[x]\downarrow\}$ (gegeben w als Kodierung einer TM und x als Eingabe der TM, hält M_w bei Eingabe x?)
- **Halteproblem auf leerem Band / ϵ-Halteproblem**: $H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\}$
- **Äquivalenzproblem**: $Eq = \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$
- **Leerheitsproblem**: $\text{Empty} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \neq \emptyset\}$ (ist die Sprache der Turingmaschine (nicht-)leer?)
- **Hilberts 10. Problem**: ob ein *Polynom in n Variablen* mit *ganzzahligen Koeffizienten* eine *ganzzahlige Nullstelle* hat
- **Postsches Korrespondenzproblem (PCP)**: siehe unten...
- **Unentscheidbare Probleme** für **CFGs** G_1, G_2:
    - $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
    - $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?
    - $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?
    - $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?
    - $L(G_1) = L(G_2)$?
    - G mehrdeutig?
    - $L(G)$ regulär?
    - $L(G)$ deterministisch?
    - $L(G) = L(\alpha)$ mit α RegEx?
- **(!)** nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer (z.B. $H \leq Eq, Eq \not\leq H$)

Reduktionen

- **Reduktion**: Methode, bei der *ein Problem auf ein anderes zurückgeführt wird*

- **formal**: eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist *reduzierbar* auf $B \subseteq \Gamma^*$ gdw. es eine *totale berechenbare* Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt mit $\forall w \in \Sigma^* : w \in A \iff f(w) \in B$
- **Schreibweise**; $A \leq B$ (A reduziert auf B)
  - **intuitiv**: A "leichter" als B, deshalb $\leq$; aus einen Algorithmus für B kann man einen Algorithmus für A gewinnen
- **intuitiv**: *Verbindung* zwischen zwei Entscheidungsproblemen; gibt es einen Algorithmus für *das zweite Problem*, so lässt sich über die Reduktion *auch das erste lösen*
- **Idee**: *gegeben* die Eingabe für das erste Problem, ändere die Eingabe durch eine *Konverterfunktion* und gebe die veränderte Eingabe der zweiten Funktion $\to$ das zweite Problem gibt *die korrekte Antwort für das erste Problem anhand der veränderten Eingabe* (Ja-Instanzen werden auf Ja-Instanzen abgebildet, Nein-Instanzen werden auf Nein-Instanzen abgebildet)
  - die *Reduktion* bezieht sich legidlich auf die *Konverterfunktion*...
- **Checkliste**:
  - **Beschreibung**: wie funktioniert f?
  - **Totalität**: für jedes Element aus A berechnet die Funktion ein Ergebnis
  - **Berechenbarkeit**: die einzelnen Schritte sind berechenbar
  - **Korrektheit**: $w \in A \iff ... \iff w' \in B$
- **Schlussfolgerungen**: wenn $A \leq B$...
  - B entscheidbar $\implies$ A entscheidbar
  - B semientscheidbar $\implies$ A semientscheidbar
  - A unentscheidbar $\implies$ B unentscheidbar
  - A (semi-)entscheidbar $\implies$ B ??? (keine Aussage möglich)
  - B unentscheidbar $\implies$ A ??? (keine Aussage möglich)

```
bool solve_L1(string w) {
  return solve_L2(f(w));
}

bool solve_L2(string w) {
  return ...;
}
```

- [Satz von Rice]: es ist *unmöglich*, eine *beliebige nicht-triviale Eigenschaft der erzeugten Funktion einer Turing-Maschine / eines Algorithmus* algorithmisch zu entscheiden
  - **intuitiv**: alle Probleme der Art "gegeben eine DTM M, hat $L(M)$ die Eigenschaft..." sind *unentscheidbar*
  - **Reduktionsschema**: gegeben DTM M', hat $L(M')$ die Eigenschaft E?

        - **Idee**: $H \leq L$ oder $\overline{H} \leq L$
        - erfüllt $\emptyset$ die Eigenschaft E? (ist $\emptyset$ die Ja-Instanz?)
            - **ja**: $\overline{H} \leq L$
                - gegeben M und w, konstruiere M':
                    - führe M auf w aus (auf anderem Band, um sicherheitshalber das Eingabewort für M' zu merken)
                    - falls M auf w hält, führe eine DTM aus, die die Eigenschaft *nicht erfüllt*
                    - falls diese akzeptiert, akzeptiere, sonst verwirf
            - **nein**: $H \leq L$
                - gegeben M und w, konstruiere M':
                    - führe M auf w aus (auf anderem Band)
                    - falls M auf w hält, führe eine DTM aus, die die Eigenschaft *erfüllt*
                    - falls diese akzeptiert, akzeptiere, sonst verwirf
- **semantische Eigenschaft**: Eigenschaft einer DTM M, die nur von $L(M)$ abhängt
    - **anders**: wenn $L(M) = L(M')$, dann erfüllen entweder *beide* TM die Eigenschaft oder *keine*
- **triviale Eigenschaft**: Eigenschaft, die entweder *jede* DTM erfüllt oder *keine*

Semi-Entscheidbarkeit / Rekursive Aufzählbarkeit

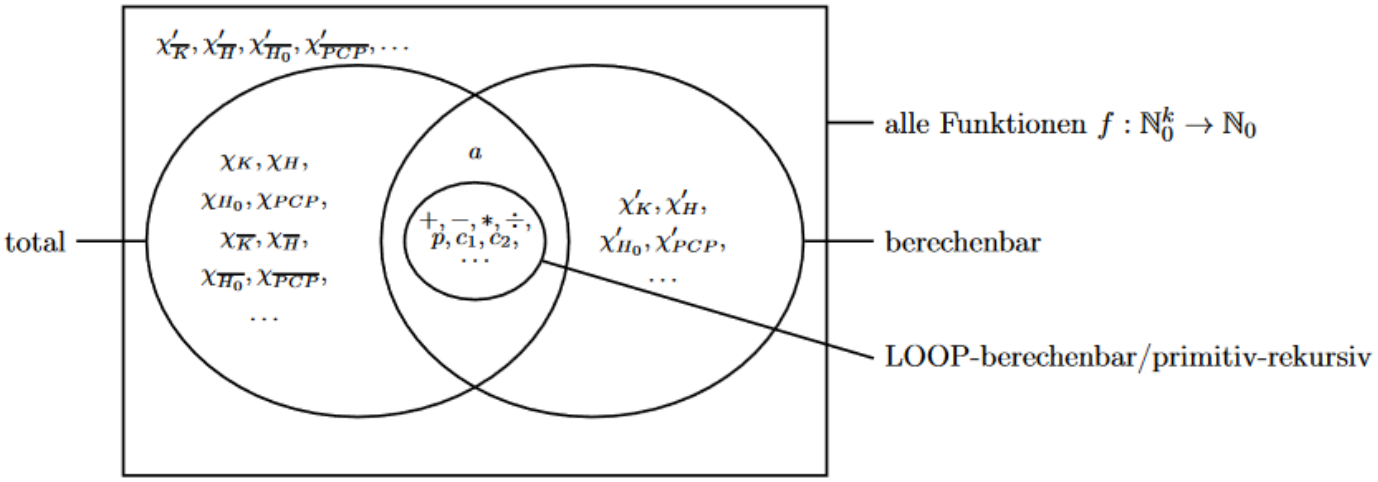
- **Semi-Entscheidbarkeit**: eine Mengeneigenschaft heißt semi-entscheidbar, wenn es ein Algorithmus gibt, der für jedes Element der Menge *mit der "JA"-Eigenschaft* in endlicher Zeit "JA" zurückgibt, sonst *nicht terminiert*
    - **formal**: eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ oder $A \subseteq \Sigma^*$ heißt semi-entscheidbar gdw. die *partielle* charakteristische Funktion $\chi'_A(x)$ *berechenbar* ist
        - $\chi'_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \bot & \text{sonst } (\text{terminiert nicht, undefiniert}) \end{cases}$
    - **co-semi-entscheidbar:** wie semi-entscheidbar, nur für "NEIN"
    - **Schlussfolgerungen**:
        - A entscheidbar $\iff$ $A, \overline{A}$ semi-entscheidbar
        - $A \leq B$:
            - B semi-entscheidbar $\implies$ A semi-entscheidbar
            - A nicht semi-entscheidbar $\implies$ B nicht semi-entscheidbar
            - A nicht co-semi-entscheidbar $\implies$ B nicht co-semi-entscheidbar
        - L co-semi-entscheidbar $\iff$ $\overline{L}$ semi-entscheidbar
        - L semi- und co-semi-entscheidbar $\iff$ L entscheidbar

        - L semi-entscheidbar $\iff$ L Turing-erkennbar
    - **(!)** das *Halteproblem* ist semi-entscheidbar
- **rekursiv aufzählbar**: eine Menge A heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der alle "JA"-Instanzen aufzählt
    - **funktionsweise**: der Algorithmus bekommt keine Eingabe, darf unendlich lange laufen, muss jede JA-Instanz mindestens einmal ausgeben und darf niemals eine NEIN-Instanz ausgeben
    - **formal**: A rekursiv aufzählbar $\iff$ $A = \emptyset$ oder es gibt eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ so dass $A = \{f(0), f(1), f(2), ...\}$, wobei Elemente doppelt auftreten können $f(i) = f(j)$ und die Reihenfolge beliebig ist
    - **(!)** A rekursiv aufzählbar $\iff$ A semi-entscheidbar
- **Äquivalenzen**: alles hier ist untereinander äquivalent...
    - A ist semi-entscheidbar
    - A ist rekursiv aufzählbar
    - A ist vom Typ 0
    - $A = L(M)$ für eine TM M (A ist die Menge aller Berechnungsergebnisse einer TM)
    - χ'_A ist berechenbar
    - A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
    - A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

Das Postsche Korrespondenzproblem

- **Postsches Korrespondenzproblem (PKP / PCP)**: gegeben beliebig viele Kopien von "Dominosteinen", wo in der oberen und unteren Hälften ein Wort steht; gibt es eine Folge dieser Steine, so dass das zusammengesetzte Wort oben und das Wort unten gleich sind?
    - **formal**: gegeben eine endliche Folge $(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k); x_i, y_i \in \Sigma^+$, gibt es eine Folge von Indizes $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., k\}, n > 0$ so dass $x_{i_1}, ..., x_{i_n} = y_{i_1}, ..., y_{i_n}$
        - wenn ja $\to$ $i_1, ..., i_n$ Lösung der Instanz $(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k)$ des PCP-Problems
    - **(!)** PCP ist *unentscheidbar* und *semi-entscheidbar*
    - **Sinn**: "*das leichteste untentscheidbare Problem*" $\to$ wird häufig verwendet, um mittels *Reduktion* die *Untentscheidbarkeit* eines *anderen* Problems zu zeigen
    - **modifiziertes PCP / MPCP**: wie PCP, aber man muss mit dem *ersten* Dominostein anfangen
    - **(!)** MPCP $\leq$ PCP
    - **(!)** $H \leq$ MPCP
    - **Bemerkungen**:
        - PCP entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
        - PCP entscheidbar falls $k \leq 2$
        - PCP unentscheidbar falls $k \geq 5$

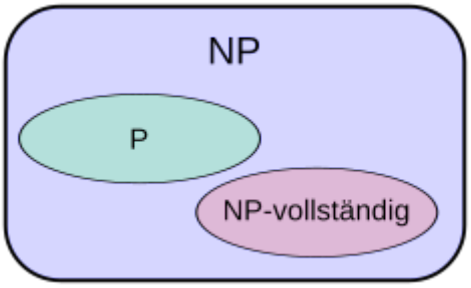
Überblick: Klassen von Funktionen



Komplexitätstheorie

- **Komplexitätstheorie**: wie schnell kann man ein Problem lösen / mit wie viel Speicherplatz kann ich das Problem lösen?
  - **hier**: *nicht* Komplexität des Lösungsalgorithmus (z.B. InsertionSort, MergeSort), sondern des *Problems* (z.B. Arraysortierung)
  - **Beschreibung der Komplexität eines Algorithmus**:
    - abhängig von der *Länge der Eingabe* (n)
    - worst-case
    - O-Notation
- **Komplexitätsklasse**: Menge von Problemen, die sich alle mit denselben Ressourcen lösen lassen (z.B. in gewisser Zeit / mit gewissem Platz)
  - **formal (P)**: $\text{time}_M(w) =$ Anzahl der Schritte, bis die DTM $M[w]$ hält
    - $\text{time}_M(w) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (# Schritte oder M hält nicht)
  - **formal² (P)**: $\text{TIME}(f(n)) =$ die Klasse der in Zeit $f(n)$ entscheidbaren Sprachen
    - $\text{TIME}(f(n)) = \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ DTM } M : A = L(M) \land \forall w \in \Sigma^* : \text{time}_M(w) \leq f(|w|)\}$ (die DTM entscheidet die Sprache A in höchstens $f(n)$ Schritten)
      - **Beispiel**: $f(n) = n^2 \implies M[w]$ hält nach höchstens n^2 Schritten
  - **formal (NP)**: $\text{ntime}_M(w) =$
    $$\begin{cases} \text{minimale Anzahl der Schritte bis NTM } M[w] \text{ akzeptiert} & \text{falls } w \in L(M) \\ 0 & \text{falls } w \notin L(M) \end{cases}$$
  - **formal² (NP)**: $\text{NTIME}(f(n)) = \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ NTM } M : A = L(M) \land \forall w \in \Sigma^* : \text{ntime}_M(w) \leq f(|w|)\}$ (die NTM entscheidet die Sprache A in höchstens $f(n)$ Schritten)
    - **äquivalent (NP)**: die NTM $M[w]$ muss nach *maximal* $p(|w|)$ Schritten *halten*

Komplexitätsklassen P und NP



- **Komplexitätsklasse P**: Probleme, die von einer *DTM in polynomieller Zeit* lösbar sind ("effizient lösbare" Probleme)
  - **formal**: $P = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{TIME}(O(n^k))$
  - **anders**: $P = \{L \mid$ es gibt ein Polynom $p(n)$ und eine $p(n)$-zeitbeschränkte *DTM* M mit $L = L(M)\}$
  - **Bemerkungen**:
    - $O(n \log n) \subset O(n^2)$
    - $\forall k : n^{\log n}, 2^n \notin O(n^k)$
    - $A \notin P$ schwierig...
- **Komplexitätsklasse NP**: Probleme, die von einer *NTM in polynomieller Zeit* lösbar sind ("effizient verifizierbare" Probleme)
  - **formal**: $NP = \bigcup_{p \text{ Polynom}} \mathrm{NTIME}(p(n))$
  - **anders**: $NP = \{L \mid$ es gibt ein Polynom $p(n)$ und eine $p(n)$-zeitbeschränkte *NTM* M mit $L = L(M)\}$
  - **Bemerkungen**:
    - $P \in NP$ (ob $P = NP$ ist noch offen...)
    - $A \in P \implies \overline{A} \in P$ (tausche End- und Nichtendzustände der TM; gilt *nicht* für NP)
- **NP-Zertifikate**: gültige "Lösungsvorschläge" für ein Problem in NP, was leicht (deterministisch, polynomiell) verifizierbar ist
  - **formal**: DTM M mit $L(M) \subseteq \{w\#c \mid w \in \Sigma^*, c \in \Delta^*\}$
  - **anders**: M heißt *Verifikator* für A wenn $A = \{w \in \Sigma^* \mid \exists c \in \Delta^* : w\#c \in L(M)\}$
    - $w\#c \in L(M) \implies c$ Zertifikat für w (w Eingabe und c Zertifikat für JA-Instanz)
      - **Beispiel (SAT)**: w Formel, c Belegung
      - **Beispiel (HAMILTON)**: w Graph, c Pfad
    - $|c| \leq p(|w|)$ (Länge des Zertifikats beschränkt)
  - **polynomiell beschränkter Verifikator**: M Verifikator für A und $\exists$ Polynom p : $\mathrm{time}_M(w\#c) \leq p(|w|)$

- **intuitiv**: für ein Problem ist es...
  - *schwer zu entscheiden*, ob es lösbar ist
  - *leicht zu entscheiden*, ob ein *Lösungsvorschlag* eine Lösung (Zertifikat) ist
- **(!)** $A \in NP \iff \exists$ polynomiell beschränkter Verifikator für A

- **allgemein**:
  - P: Sprachen, bei denen $w \in L$ schnell *entschieden* werden kann
  - NP: Sprachen, bei denen ein *Zertifikat* für $w \in L$ schnell *verifiziert* werden kann

Wichtige Probleme in P

- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \text{TIME}(O(n^2)) \subseteq P$
- $\{(G, w) \mid G \text{ ist CFG } \wedge w \in L(G)\} \in P$
- $\{(G, w) \mid G \text{ ist Graph } \wedge w \text{ ist Pfad in } G\} \in P$
- $\{G \mid G \text{ hat Eulerkreis}\} \in P$ (G zusammenhängend und jeder Knoten hat geraden Grad)
- $\{\text{bin}(p) \mid p \text{ ist Primzahl}\} \in P$
- **1KNF-SAT** $\in P$
- **2KNF-SAT** $\in P$

Polyzeitreduktion, NP-Vollständigkeit

- **Polyzeitreduktion (polynomiell reduzierbar)**: Reduktion, wobei f *in Polyzeit* berechnet werden kann
  - **formal**: eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist *polynomiell reduzierbar* auf $B \subseteq \Gamma^*$ gdw. es eine *totale, von einer DTM in polynomieller Zeit berechenbare* Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt mit $\forall w \in \Sigma^* : w \in A \iff f(w) \in B$
    - **Schreibweise**; $A \leq_p B$ (A reduziert auf B)
    - **Transitivität**: $\leq_p$ ist *transitiv*
  - **Abgeschlossenheit**: P und NP sind unter polynomieller Reduzierbarkeit *nach unten abgeschlossen*
    - $A \leq_p B, B \in P \implies A \in P$
    - $A \leq_p B, B \in NP \implies A \in NP$
  - **(!)** *jedes Problem* aus P kann auf *jedes andere Problem* aus P *reduziert* werden
    - **Idee**: wenn man ein Problem $A \in P$ auf ein anderes Problem $B \in P$ reduzieren möchte, kann man eine Funktion angeben, die einfach A löst (by default in polynomieller Zeit!) und dann ein entsprechendes Beispiel für B ausgibt
      - **Beispiel (Erreichbarkeit in gerichteten Graphen $\leq_p$ Nicht-Leerheit eines NFAs)**:
        - ist t von s erreichbar, gebe z.B. NFA nur mit Endzustand zurück (akz. leeres Wort)
        - ist t von s erreichbar, gebe z.B. NFA *ohne* Endzustand zurück (leere Sprache)

- **NP-Schwere / NP-Härte**: Eigenschaft eines Problems, *mindestens so schwer lösbar zu sein* wie die Probleme der Klasse NP
  - **formal**: L NP-hart $\iff \forall A \in NP : A \leq_p L$ (alle A aus NP sind polynomiell reduzierbar auf L)
  - können auch *außerhalb* von NP sein...
- **NP-Vollständigkeit**: Eigenschaft eines Problems *in NP*, dass man *alle anderen Probleme in NP auf dieses Problem reduzieren kann* (die "schwierigsten" Probleme der Klasse NP)
  - **formal**: L NP-vollständig $\iff$ L NP-hart und $L \in NP$
  - **(!)** *jedes Problem* in P kann auf *jedes NP-vollständige Problem* reduziert werden
  - **(!)** *jedes NP-vollständige Problem* kann auf *jedes andere NP-vollständige Problem* reduziert werden
  - **Idee**: $P = NP \iff$ es wird gezeigt, dass irgendein NP-vollständiges Problem in P liegt
  - **Vermutung**: $P \neq NP \iff$ *kein* NP-vollständiges Problem ist in P

Wichtige NP-vollständige Probleme

- **SAT**
  - gegeben eine *aussagenlogische Formel* F
  - ist F *erfüllbar*?
- **3KNF-SAT** (NP-Vollständigkeit gilt auch für $n \geq 3$)
  - gegeben eine *aussagenlogische Formel* F *in 3KNF*
  - ist F *erfüllbar*?
- **KNF-SAT**
  - gegeben eine *aussagenlogische Formel* F *in KNF*
  - ist F *erfüllbar*?
- **HAMILTON** $= \{G \mid G \text{ hat Hamiltonkreis}\}$
  - gegeben ein Graph G
  - hat G einen *Hamiltonkreis*?
- **RUCKSACK** $= \{\text{bin}(a_1)\#...\#\text{bin}(a_n)\#\text{bin}(c) \mid \exists R \subseteq \{1,...,n\} : \sum_{i \in R} a_i = c\}$ (auch Teilsummenproblem benannt)
  - gegeben eine *Menge von Gewichte*, und eine *Gewichtsschranke*
  - gibt es eine *Teilmenge*, deren *Gesamtgewicht gleich der Gewichtsschranke* ist? (oder kleiner gleich)
- **3COL** (auch allgemein **COL** mit zusätzliche Zahl k)
  - gegeben ein *ungerichteter Graph*

- gibt es eine Färbung der Knoten mit 3 Farben, so dass *keine benachbarten Knoten gleich gefärbt sind*?

- **SET-COVER / MENGENÜBERDECKUNG**
  - gegeben eine *Menge* M, *Liste von Teilmengen* von M und eine *Zahl* k
  - kann man k von den Teilmengen wählen, die M *überdecken*?
- **CLIQUE**
  - gegeben ein *Graph* G und eine *Zahl* k
  - hat G eine *Clique* der Größe k?
- **PARTITION**
  - gegeben *Zahlen* $a_1, ...a_n \in \mathbb{N}$
  - kann man die Zahlen in zwei Mengen S_1 und $\overline{S_1}$ aufteilen, so dass die *Summe* der Zahlen in S_1 *gleich* der *Summe* der Zahlen in $\overline{S_1}$ ist?
- **BIN PACKING**
  - gegeben eine Anzahl k von Behältern der Größe b und eine Anzahl n Objekte mit den Größen $a_1, ...a_n \leq b$
  - können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass keiner der Behälter überläuft?
    - **formal**: $\exists f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., k\} \forall j \in \{1, ..., k\} : \sum_{f(i)=j} a_i \leq b$?
- **TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)**
  - gegeben eine Entfernungsmatrix $M_{ij} \in \mathbb{N}^{n \times n}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
  - gibt es einen Hamiltonkreis der Länge $\leq k$?

Aussagenlogik

- **Aussagenlogik**: bestehend aus Formeln und Variablen
  - **Formeln**: $F \to \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid X$ (siehe DS für synt. Zucker...)
  - **Variablen**: $X \to x \mid y \mid z \mid ...$
  - **Belegung**: Funktion σ von Variablen auf $\{0, 1\}$
  - **Erfüllbarkeit**: F erfüllbar $\iff \exists \sigma : \sigma(F) = 1$ (es gibt eine Belegung von Variablen in der Wahrheitstabelle, so dass für die Formel "wahr" steht)
  - **Unerfüllbarkeit**: F unerfüllbar $\iff \forall \sigma : \sigma(F) = 0$ (es gibt *keine* Belegung von Variablen in der Wahrheitstabelle, so dass für die Formel "wahr" steht)
  - **Tautologie / Allgemeingültigkeit / Gültigkeit**: F allgemeingültig / gültig $\iff \forall \sigma : \sigma(F) = 1$ (für jede Belegung von Variablen ist die Formel wahr)
  - **(!)** $F_1 \leftrightarrow F_2$ (äquivalent) $\iff (F_1 \wedge \neg F_2) \vee (\neg F_1 \wedge F_2)$ nicht erfüllbar
  - **(!)** F erfüllbar $\implies \overline{F}$ ungültig
  - **(!)** F unerfüllbar $\implies \overline{F}$ gültig

- **Konjunktive Normalform (KNF)**: Konjunktion von Klauseln ($K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$)
  - **Klausel**: *Disjunktion* von Literalen
  - **Literal**: Variable oder *negierte* Variable
  - n**KNF**: KNF, wobei jede Klausel höchstens n Literale hat