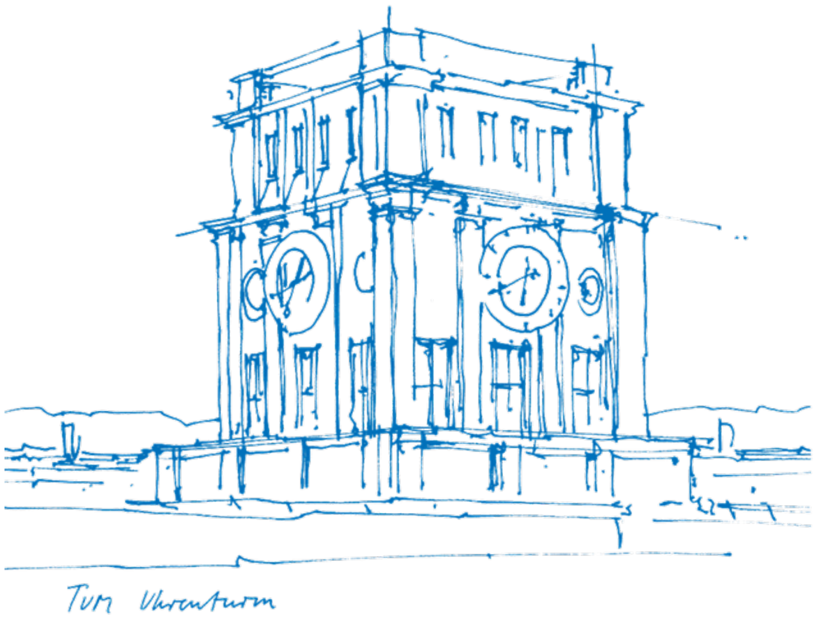
GRNVS Tutorium 03 - SS21

Fabian Sauter
Technische Universität München
Grundlagen: Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)
Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Garching, 03.05.2021

Slides & Notes: `http://grnvs.uwpx.org`



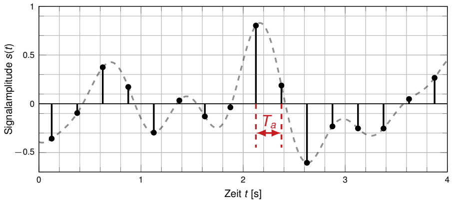
Wiederholung

Abtasttheorem von Shannon und Nyquist

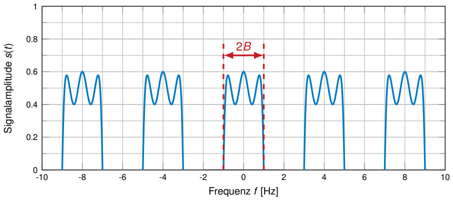
Ein auf $|f| \leq B$ bandbegrenztes Signal $s(t)$ ist vollständig durch äquidistante Abtastwerte $\hat{s}[n]$ beschrieben, sofern diese nicht weiter als $T_a \leq 1/2B$ auseinander liegen. Die Abtastfrequenz, welche eine vollständige Signalrekonstruktion erlaubt, ist folglich durch

$$f_a > 2B$$

nach unten beschränkt.



(a) Abgetastetes Signal $\hat{s}[n]$



(b) Zugehöriges Spektrum $\hat{S}(f)$ (schematisch)

Quantisierung

Die Abtastwerte $\hat{s}[n] \in \mathbb{R}$ sind noch kontinuierlich im Wertebereich und können i. A. nicht exakt gespeichert werden.

Lösung: Quantisierung

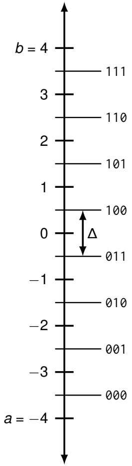
- Die Unterscheidung von $M = 2^N$ Signalstufen erfordert Codewörter von N bit
- Jeder Signalstufe wird dabei ein bestimmtes Codewort zugeordnet
- Die Signalstufen werden im Quantisierungsintervall $I_Q = [a,b]$ „sinnvoll" verteilt
- Was ist „sinnvoll"?

Beispiel: Lineare Quantisierung mit mathematischem Runden

- Optimal, wenn alle Werte innerhalb I_Q mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten
- Stufenbreite $\Delta = \dfrac{b-a}{M}$
- Innerhalb I_Q beträgt der maximale Quantisierungsfehler $q_{\max} = \Delta/2$
- Signalwerte außerhalb I_Q werden auf die größte bzw. kleinste Signalstufe abgebildet $\Rightarrow$ Außerhalb I_Q ist der Quantisierungsfehler unbeschränkt

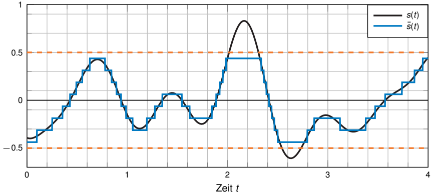
Was ist, wenn die Signalwerte nicht gleichverteilt sind?

- Lineare Quantisierung ist typischerweise suboptimal
- Nicht-lineare Quantisierung wird beispielsweise bei der Digitalisierung von Sprache oder Musik eingesetzt

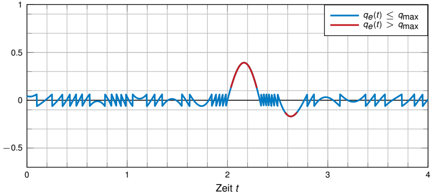


Quantisierung

Beispiel: Lineare Quantisierung im Intervall $I = [-0{,}5; 0{,}5]$ mit $N = 3$ bit:



(a) Quantisiertes Signal $\bar{s}(t)$ (blau)



(b) Quantisierungsfehler $q_e(t) = s(t) - \bar{s}(t)$

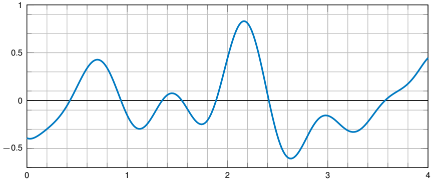
Codewort	000	001	010	011	100	101	110	111
Signalstufe	$-7/16$	$-5/16$	$-3/16$	$-1/16$	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$

Frage: Warum liegt die höchste Signalstufe bei $7/16$ und nicht bei $1/2$?

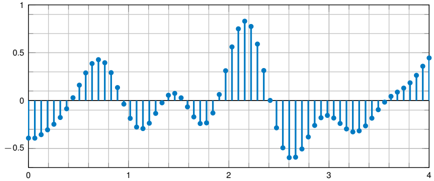
Anmerkungen:

- Die Zuweisung von Codewörtern zu Signalstufen ist im Prinzip willkürlich
- Häufig wählt man jedoch einen Code, welcher die Auswirkung einzelner Bitfehler reduziert (z. B. Gray-Code: Benachbarte Codewörter unterscheiden sich nur in jeweils einer binären Ziffer, d. h. die Hamming-Distanz ist 1)

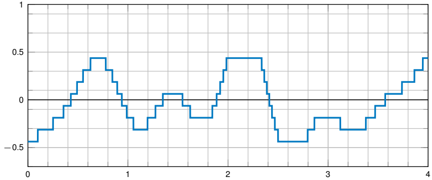
Signaltypen (Übersicht)



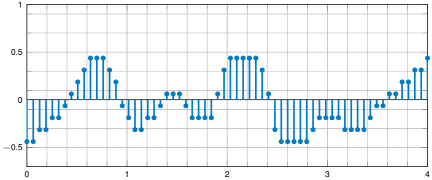
(a) Analog $s(t)$



(b) Zeitdiskret und wertkontinuierlich $\hat{s}[n]$

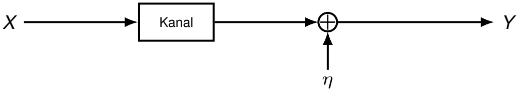


(c) Zeitkontinuierlich und wertdiskret $\bar{s}(t)$



(d) Digital $s[n]$

Modellvorstellung eines (linearen, zeitinvarianten) Kanals mit einem Ein- und Ausgang:



Unser Modell berücksichtigt:

- Dämpfung (Signalamplitude des Nutzsignals am Ausgang ist geringer als am Eingang)
- Tiefpassfilterung (höhere Frequenzen werden stärker gedämpft als niedrige)
- Verzögerung (die Übertragung benötigt eine gewisse Zeit)
- Rauschen in Form von Additive White Gaussian Noise (AWGN)[1]

Wir berücksichtigen unter anderem nicht (weil zu kompliziert):

- Interferenzen durch andere Übertragungen
- Reflektionen eigener Signale
- Verzerrungen durch nichtlineare Filter, u.a. in Abhängigkeit des Signalpegels
- Zeitvariante Einflüsse, z. B. können Objekte und Personen eine Funkübertragung beeinflussen

[1] AWGN ist eine vereinfachende Modellvorstellung von Rauschprozessen. In der Realität gibt es kein AWGN.

Beispiel:

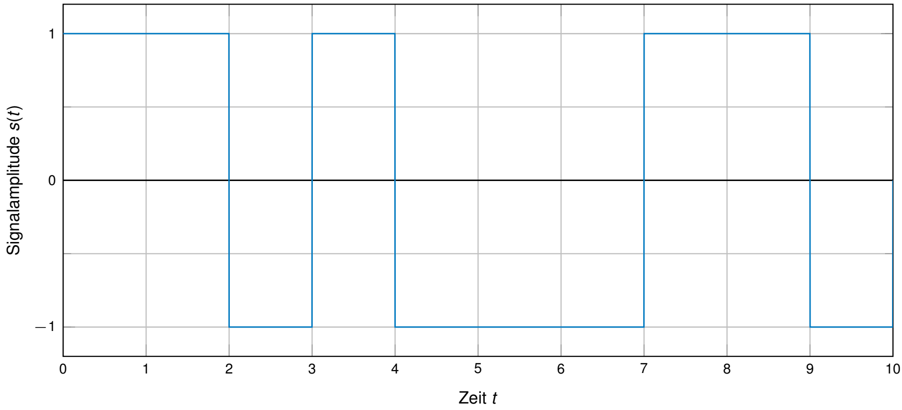


Abbildung 4: Idealisiertes Sendesignal

Beispiel:

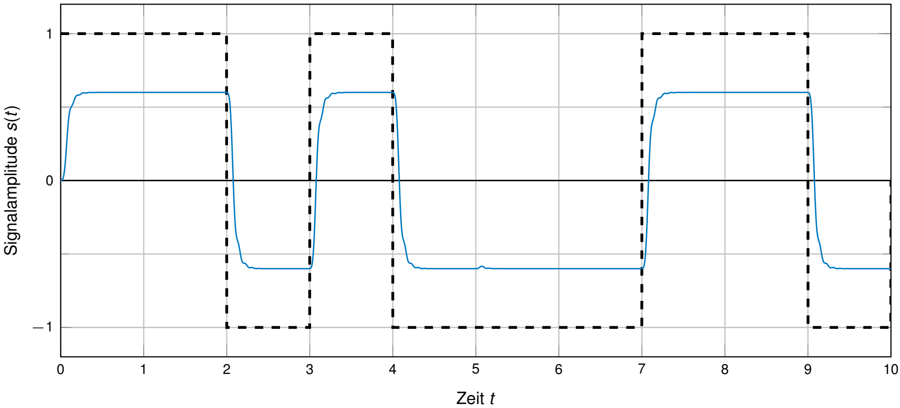


Abbildung 4: Sendesignal nach Dämpfung und Tiefpasseinflüssen durch den Kanal

Beispiel:

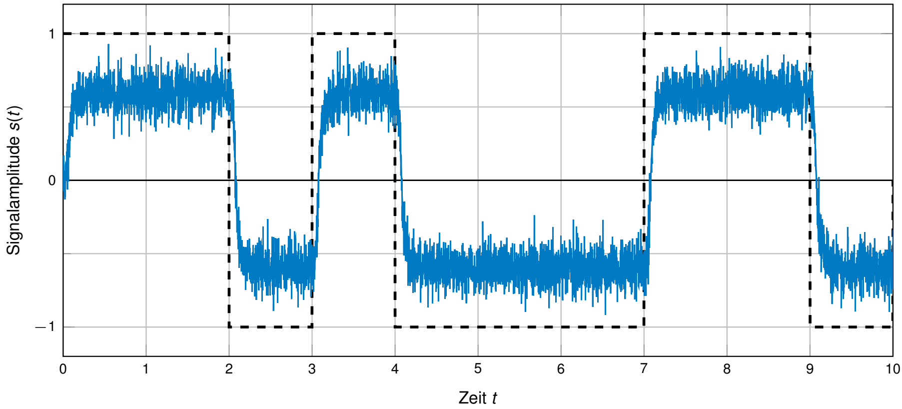


Abbildung 4: Sendesignal nach Dämpfung und Tiefpasseinflüssen durch den Kanal sowie mit AWGN

Rauschfreier, M-ärer Kanal

Angenommen es können nicht nur zwei sondern $M = 2^N$ unterscheidbare Symbole übertragen werden. Wie ändert sich die erzielbare Datenrate?

Wir erinnern uns an Quantisierung und Entropie:

- Mit einer Wortbreite von N bit lassen sich $M = 2^N$ diskrete Signalstufen darstellen.
- Emittiert eine Quelle alle Zeichen (Signalstufen) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, so ist die Entropie (und damit die mittlere Information) der Quelle maximal.

Folglich erhalten wir für die Übertragungsrate über einen Kanal der Bandbreite B die maximale Rate $2B \log_2(M)$ bit.

Hartleys Gesetz

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit M unterscheidbaren Signalstufen ist die Kanalkapazität durch

$$C_H = 2B \log_2(M) \text{ bit}$$

nach oben begrenzt.

Interessant: Wenn wir beliebig viele Signalstufen voneinander unterscheiden könnten, wäre die erzielbare Datenrate unbegrenzt! Wo ist das Problem?

Kanalkapazität

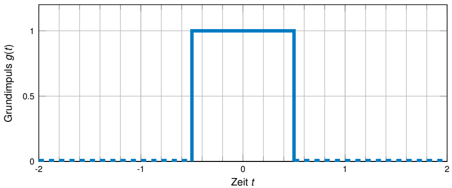
Shannon-Hartley-Theorem

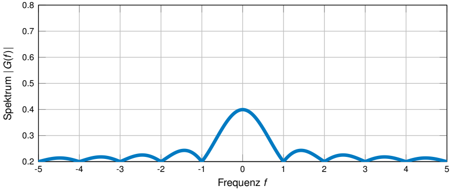
Auf einem Kanal der Bandbreite B mit additiven weißen Rauschen mit Rauschleistung P_N und Signalleistung P_S beträgt die obere Schranke für die erreichbare Datenrate

$$C_S = B \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \text{ bit.}$$

Herleitung des Theorems: siehe Shannons Veröffentlichung Communication in the Presence of Noise von 1949 [1].

Grundimpulse: Rechteckimpuls





$$g(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

Vorteile

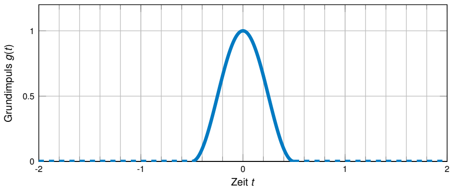
- Einfachste Darstellung im Zeitbereich
- Grundlage für verschiedene Sendeimpulse ($\rightarrow$ später)

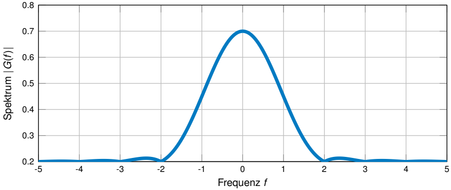
Nachteile

- Abrupte Signalwechsel praktisch schwer umsetzbar
- Langsam abklingendes Spektrum $\Rightarrow$ hohe Frequenzanteile

Leitungskodierung

Grundimpulse: $\cos^2$-Impuls





$$g(t) = \begin{cases} (\cos(2\pi t))^2 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(f) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin(\pi(f-1))}{f-1} + \frac{2\sin(\pi f)}{f} + \frac{\sin(\pi(f+1))}{f+1}\right)$$

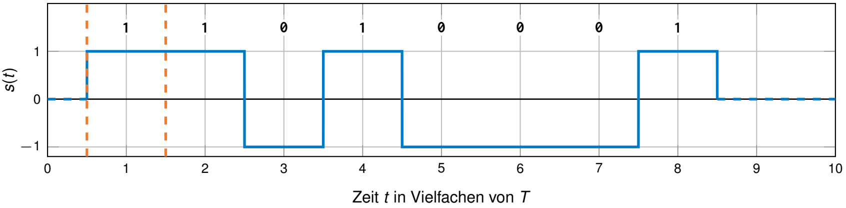
Vorteile

- Einfache praktische Umsetzung
- Schnell abklingendes Spektrum, da wenig hohe Frequenzanteile

Nachteile

- Die maximale Signalamplitude $g(t) = 1$ wird nur zum Zeitpunkt $t = 0$ erreicht
- Dadurch erschwerte Abtastung wenn Sender und Empfänger nicht taktsynchron sind

Leitungscodes: Non-Return-To-Zero (NRZ)



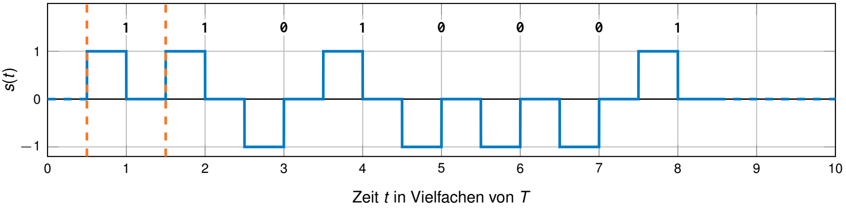
Kodiervorschrift:

- Sendeimpuls $g(t) = \text{rect}\left(t/T\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 1 Symbol/bit
- Keine Taktrückgewinnung (lange Null- oder Einsfolgen)
- Keine Gleichstromfreiheit
- Relativ breites Spektrum

Leitungscode: Return-To-Zero (RZ)



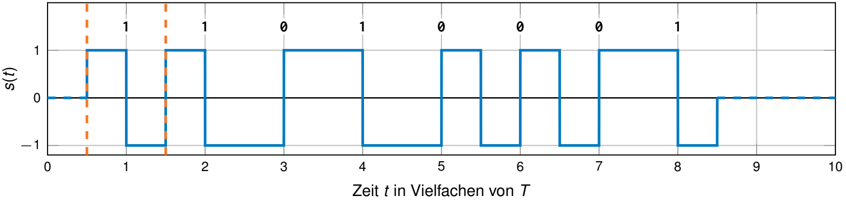
Kodiervorschrift:

- Sendeimpuls $g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{2t+1/2}{T}\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 2 Symbole/bit
- Taktrückgewinnung durch erzwungene Pegelwechsel einfach
- Keine Gleichstromfreiheit
- Breiteres Spektrum als NRZ

Leitungscode: Manchester-Code



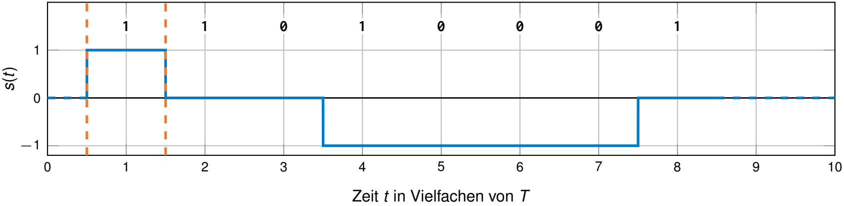
Kodiervorschrift:

- Grundimpuls $g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{2t+1/2}{T}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{2t-1/2}{T}\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 2 Symbole/bit
- Taktrückgewinnung durch erzwungene Pegelwechsel einfach
- Gleichstromfreiheit gewährleistet, da jeder Grundimpuls für sich gleichstromfrei ist
- Sehr breites und langsam abklingendes Spektrum

Leitungscode: Multi-Level-Transmit 3 (MLT3)



Kodiervorschrift:

- Grundimpuls $g(t) = \mathrm{rect}(t/T)$ (Rechteckimpuls) mit mit Periodendauer T
- Gewichte $d_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ (→ abhängig von der Anzahl der bislang beobachteten 1-Bits)
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Tenerär Code (drei Signalstufen)
- Effizienz 1 bit/Symbol
- Keine Taktrückgewinnung (lange Folge gleicher Bits)
- Keine Gleichstromfreiheit
- Schmales Spektrum, da die Grundperiode durch den periodischen Signalverlauf reduziert wird

Ablauf:

- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- (Aufgabe 1) Wenn noch Zeit ist.

Studenten zählen

(Nur als Erinnerung für mich.)