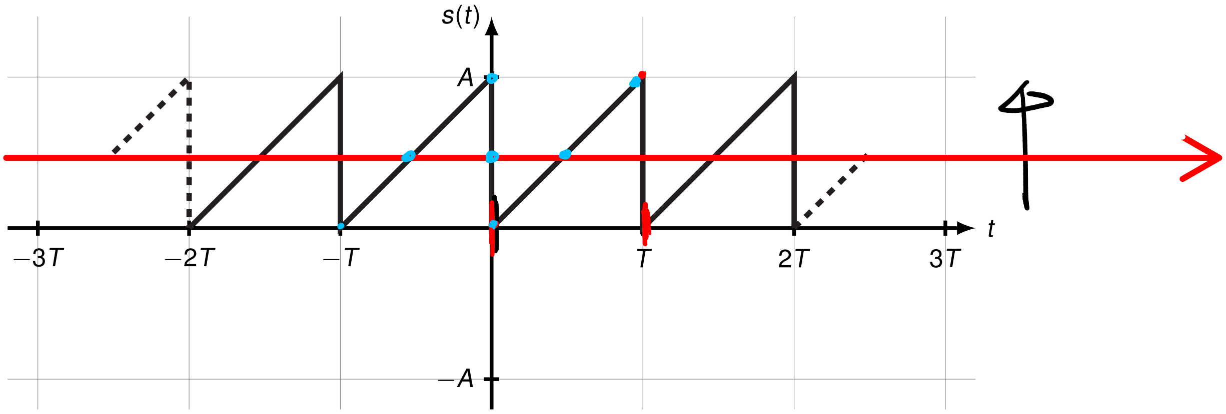
Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

Übungsblatt 1

26. April – 30. April 2021

Aufgabe 1 Fourierreihe

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$y = mx + b$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A}{T} \Rightarrow s(t) = \frac{A}{T} \cdot t$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

b_1 h_1

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{a_k}_{0} \cos(k\omega t) + \underbrace{b_k}_{\neq 0} \sin(k\omega t)) \tag{1.1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \tag{1.2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1.1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Nur a_0 bestimmt den Gleichanteil

($\frac{a_0}{2}$ ist der Gleichanteil)

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{s(t)}_{\frac{A}{T} \cdot t} \cdot \cos(\underbrace{0 \cdot \omega t}_{0})\, dt$ (Formel 1.2)

$= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1}\, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cancel{1}\, dt$

$= \frac{2A}{T^2} \cdot \int_0^T t\, dt = \frac{\cancel{2} A \cdot \cancel{T^2}}{\cancel{T^2} \cdot \cancel{2}} = A$

Bestimmt Gleichantei

$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$

Gleichanteil

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

ja, da $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt : $s(t) > 0$ $\Rightarrow$ Singnal nach oben verschoben $\Rightarrow$ Es gibt einen Gleichanteit

Zeitlicher Mittelwert : $A/2$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a_0 = A}}$

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Unser Signal ist rein Punktsymetrisch

$\Rightarrow$ sin(x) auch punktsymetrisch

$\Rightarrow$ kein cos(x)-Teil, da dieser Achsen symetrisch ist

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a_k = 0}}$

Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t \sin(ct)\,dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$

$$b_k = \frac{2}{\underset{1}{T}} \cdot \int_0^T \underbrace{s(t)}_{\frac{A}{T}\cdot t} \cdot \sin(k \cdot \underset{2\pi/T}{\omega} \cdot t)\,dt$$

$$= 2A \cdot \int_0^1 t \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)\,dt$$

Hinweis

$$\Rightarrow 2A \cdot \frac{\overbrace{\sin(k\cancel{\omega})}^{=0,\ 2\pi} - k\omega \cdot \overbrace{\cos(k\cancel{\omega})}^{=1,\ 2\pi}}{k^2 \omega^2}$$

$$= 2A \cdot \frac{-k \cdot 2\pi \cdot 1}{k^2 \cdot \omega^2}$$

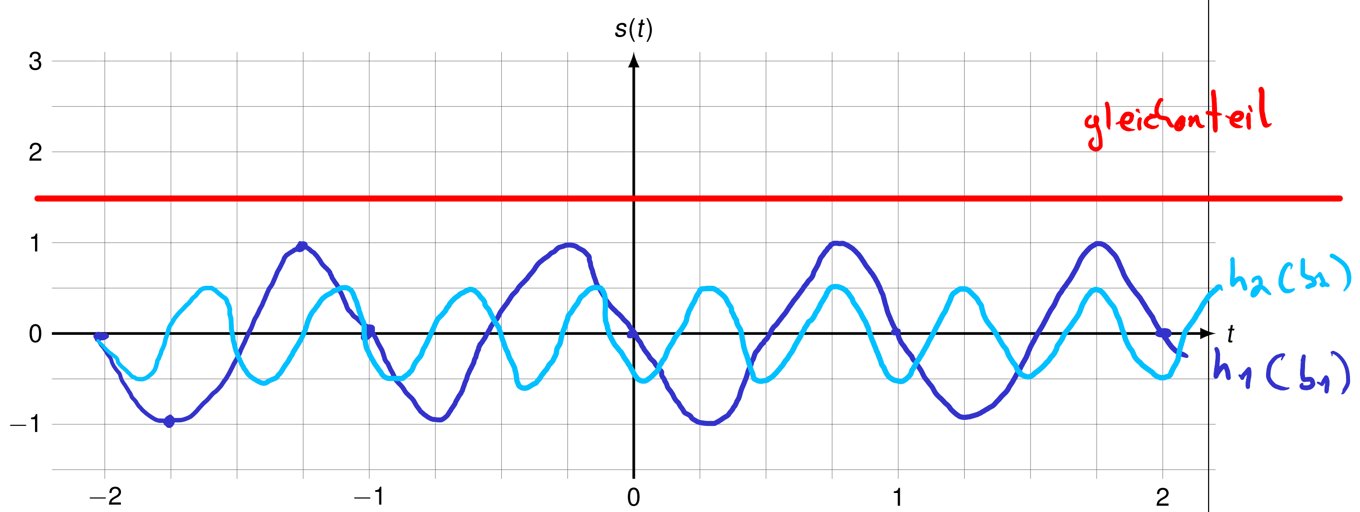
$$= 2A \cdot \frac{-1}{k \cdot 2\pi}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

k gerade
k ungerade
unterscheiden

Hier beide gleich.

g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.



$$b_1 = -\frac{A}{1 \cdot \pi}$$

$$b_2 = -\frac{A}{2 \cdot \pi}$$

Ergebnis: Gleichanteils + h_1 + h_2

Aufgabe 2 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1 \Rightarrow p_b = 0{,}75$

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

$I(a) = -\log_2(0{,}25) = -\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(2)} = 2\,\text{bit}$

$I(b) = -\log_2(0{,}75) = -\frac{\ln(0{,}75)}{\ln(2)} = 0{,}42\,\text{bit}$ $\boxed{\Rightarrow 1\,\text{bit}}$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \cdot I(x) = 0{,}25 \cdot 2\,\text{bit} + 0{,}75 \cdot 0{,}42\,\text{bit} = 0{,}81 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$

mit ungerundeten Zahlen weiter rechnen

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

$H(X) = p \cdot (-\log_2(p)) + (1-p) \cdot (-\log_2(1-p))$

$= \left[-p \cdot \frac{\ln(p)}{\ln(2)}\right] + \left[-(1-p) \cdot \frac{\ln(1-p)}{\ln(2)}\right]$

Produktregel: $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

nachdiff.

Ableiten $\Rightarrow \left[p \cdot \left(-\frac{1}{\ln(2) \cdot p}\right) + \frac{\ln(p)}{\ln(2)} \cdot (-1)\right]$

$+ \left[-(1-p) \cdot \frac{1}{(1-p) \cdot \ln(2)} \cdot (-1) + (+1) \cdot \left(\frac{\ln(1-p)}{\ln(2)}\right)\right]$

$0 = \left[-\frac{1}{\ln(2)} - \log_2(p)\right] + \left[\frac{1}{\ln(2)} + \log_2(1-p)\right]$

$\log_2(p) = \log_2(1-p)$

$p = 1-p \quad | +p$

$2p = 1 \quad | :2$

$p = 1/2$

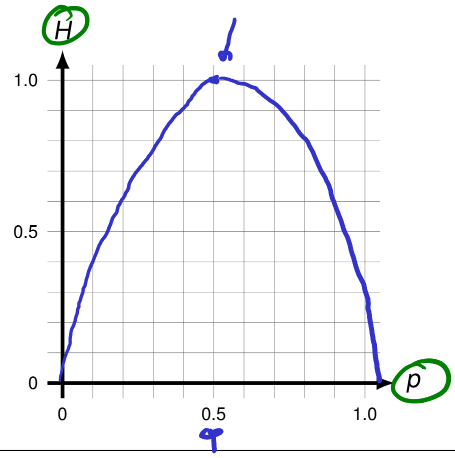
Für $p = 0{,}5$ ist die Entropie maximal.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

$$H_{max} = 0{,}5 \cdot (-\log_2(0{,}5)) + 0{,}5 \cdot (-\log_2(0{,}5))$$

$$= 1 \text{ bit / Zeichen}$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie *H* einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit *p*.



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle *Q* emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Da wir im Schnitt mit weniger als ein Zeichen die Ausgabe der Quelle Q darstellen können, beinhalten die Zeichenfolgen von Q redundanz.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine *N*-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die *N* unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt:

$$H(x) = \sum_{x \in X} I(x) \cdot p_x$$

Wenn nun alle Zeichen die selbe Auftrittswahrsch. haben:

$$H(x) = \sum_{x \in X} I(x) \cdot p(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log_2\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N} = \underline{\underline{\log_2(N)}}$$