Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

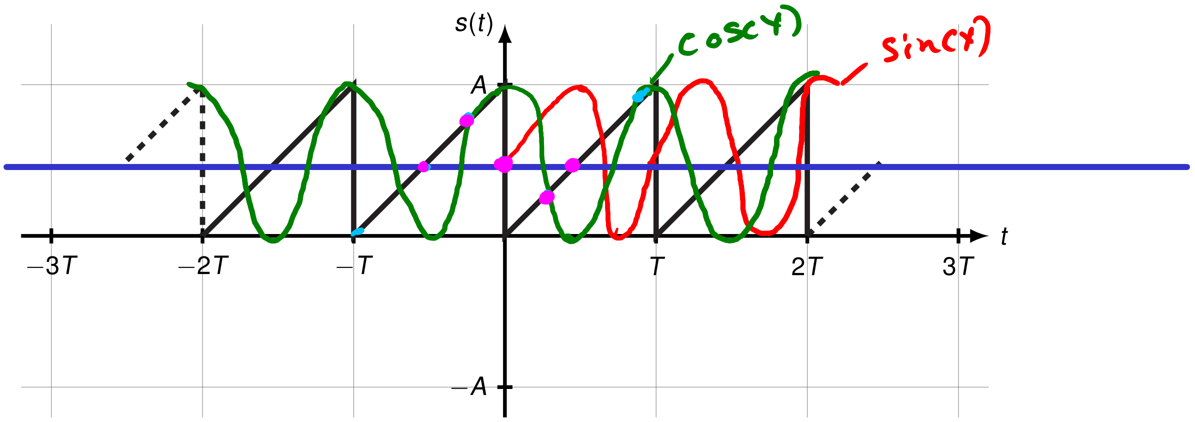
# Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

**Übungsblatt 1**

**26. April – 30. April 2021**

## Aufgabe 1 Fourierreihe

Gegeben sei das folgende $T$-periodische Zeitsignal $s(t)$:




a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$y = mx + b \Rightarrow y = mx$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A}{T} \Rightarrow y = \frac{A}{T} \cdot x \Rightarrow s(t) = \frac{A}{T} \cdot t$ *1

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\cancel{\infty}\ 2} (\boxed{a_k} \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) . \quad (1.1)$$

→0 →0

Die Koeffizienten $a_k$ und $b_k$ lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \ \text{ und } b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \quad (1.2)$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1.1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Nur $a_0$

$a_0$ bestimmt den Gleichanteit

$\left(\frac{a_0}{2}\right.$ ist der Gleichanteil$\left.\right)$

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{s(t)}_{*1} \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot \omega t)}_{1}\, dt$ Formel (1.2)

$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot 1\, dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\, dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \left(\left[\frac{T^2}{2}\right] - \left[\frac{0^2}{2}\right]\right)$

$= \frac{\cancel{2} A \cdot \cancel{T^2}}{\cancel{T^2} \cdot \cancel{2}} = A \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

Ja, da $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt: $s(t) \geq 0$ $\Rightarrow$ Signal ist nach oben verschoben $\Rightarrow$ Es gibt einen Gleichanteil

zeitlicher Mittelpunkt einer Periode ist $\underline{\underline{A/2}}$ = Gleichanteil

$a_0 = A$

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_k$.
**Hinweis:** Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Das Signal (Sägezahn) ist punktsymetrisch

$\Rightarrow$ nur $\sin(x)$-Anteile benötigt

$\Rightarrow$ $a_k = 0$ $\forall k \geq 1$, weil der $\cos(x)$-Achsensymetrisch ist

Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten $b_k$.

**Hinweise:** $\int_0^1 t \sin(ct)\, dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

$$b_k = \frac{2}{\cancel{T}\,1} \cdot \int_0^{\cancel{T}\,1} \cancel{s(t)}\,\frac{A}{\cancel{T}\,1}\cdot t \;\cdot \sin(k\omega t)\, dt$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \int_0^1 \frac{A}{1} \cdot t \cdot \sin(k\omega t)\, dt$$

$$= 2A \cdot \int_0^1 t \cdot \sin(\underbrace{k\omega}_{c} t)\, dt$$

Hinweis $\Rightarrow$ $$2A \cdot \frac{\overbrace{\sin(k \cdot 2\pi)}^{=0} - k \cdot 2\pi \cdot \overbrace{\cos(2\pi \cdot k)}^{=1}}{k^2 (2\pi)^2}$$

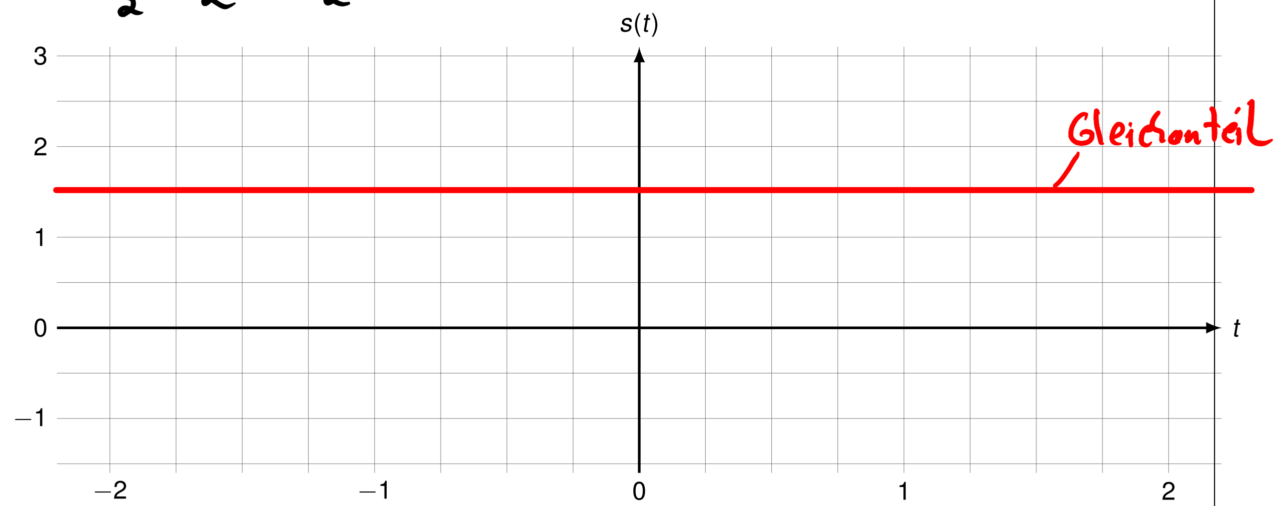
$$= 2A \cdot \frac{-\cancel{k} \cdot \cancel{2\pi} \cdot 1}{k^{\cancel{2}} \cdot (2\pi)^{\cancel{2}}} = \frac{-\cancel{2}A}{k \cdot \cancel{2}\pi} = \frac{-A}{k\pi}$$

k gerade
k ungerade } unterscheiden

Hier beide gleich

g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{3{,}14}{2} = 1{,}55$$




$$h_1 = b_1 \cdot \sin(k\omega t)$$

$$= \frac{-\pi}{1 \cdot \pi} \cdot \sin(1 \cdot 2\pi \cdot t)$$

$$h_2 =$$

## Aufgabe 2 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle $Q$, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable $X$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_b$, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

$p_b = \underbrace{1 - p_a}_{} = 1 - 0{,}25 = \underline{0{,}75}$

→ Gegenwahrsch. da $p_a + p_b = 1.0$

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$I(x) = -\log_2(p_x)$

$I(a) = -\log_2(0{,}25) = \underline{\underline{2\,\text{bit}}}$

$I(b) = -\log_2(0{,}75) = \underline{\underline{0{,}42\,\text{bit}}}$

$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

c) Bestimmen Sie die Entropie $H$ der Quelle.

$H(x) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot I(x) = \underbrace{0{,}25 \cdot 2\,\text{bit}}_{a} + \underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}42\,\text{bit}}_{b} = \underline{\underline{0{,}81 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}}}$

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_0$ und $p_1$ einer anderen binären Nachrichtenquelle $Q'$, so dass deren Entropie $H$ maximal ist.

$H(x') = p \cdot (-\log_2(p)) + (1-p) \cdot (-\log(1-p))$

Ableiten und $= 0$ setzen

$\Rightarrow$ Wenn $\underline{\underline{p = 1-p}}$, dann ist die Entropie maximal.

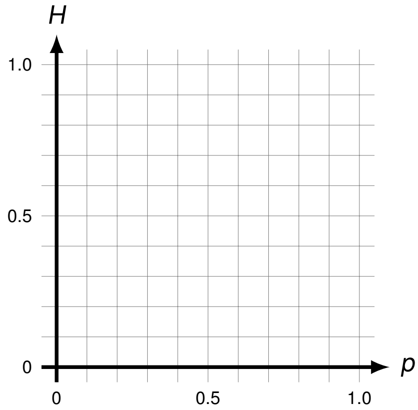
grnv. uwpx.org

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

$$H(X) = 0{,}5 \cdot (-\log_2(0{,}5)) + 0{,}5 \cdot (-\log_2(0{,}5))$$

$$= \underline{\underline{1 \text{ bit/Zeichen}}}$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie *H* einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit *p*.




g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle *Q* emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine *N*-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die *N* unterschiedliche Zeichen emittiert.