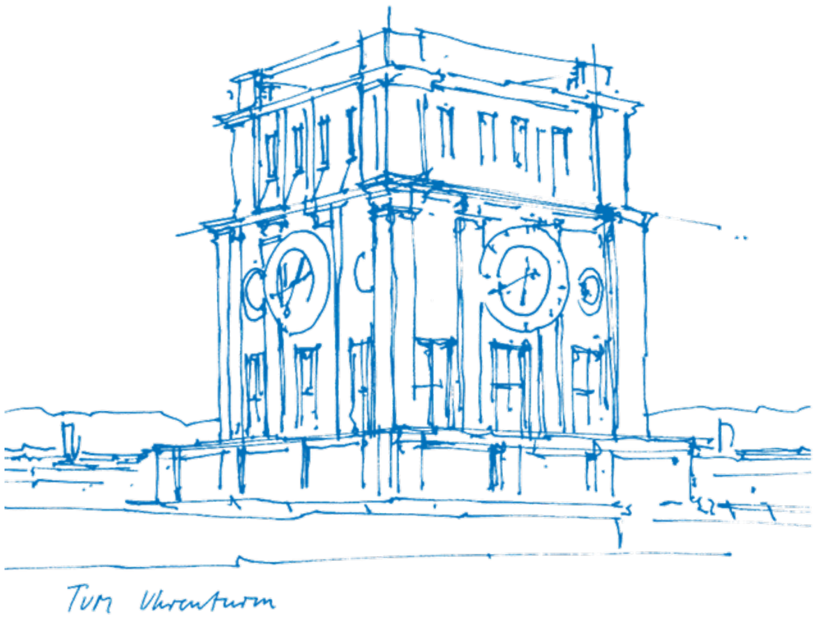
GRNVS Tutorium 02 - SS21

Fabian Sauter
Technische Universität München
Grundlagen: Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)
Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Garching, 26.04.2021

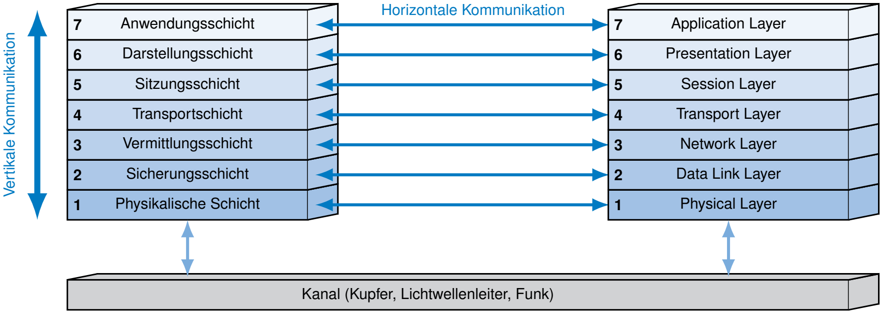
Slides & Notes: `http://grnvs.uwpx.org`



Wiederholung

Das ISO/OSI-Modell

Schematische Darstellung des OSI-Modells



Kapitel 1: Physikalische Schicht

Definition (Signale, Symbole)
Signale sind zeitabhängige und messbare physikalische Größen. Definierten messbaren Signaländerungen lässt sich ein Symbol zuordnen. Diese Symbole repräsentieren Information.

Beispiele für Signale:

- Licht (z.B. Übermittlung von Morsezeichen in der Schifffahrt)
- Spannung (z.B. Telegraphie)
- Schall (z.B. gesprochene Sprache, Musik)

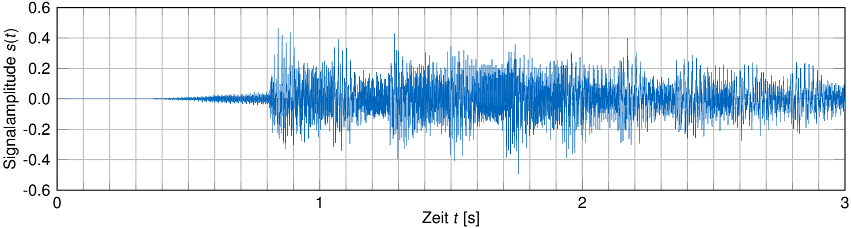


Abbildung 1: Die ersten 3 s von „Sunrise Avenue – Hollywood Hills“

Definition (Informationsgehalt)
Der Informationsgehalt eines Zeichens (oder Symbols) drückt aus, wieviel Information durch das Zeichen übertragen wird.

Der Informationsgehalt besitzt folgende Eigenschaften:

- Je seltener ein Zeichen auftritt, desto höher ist sein Informationsgehalt.
- Der Informationsgehalt einer Zeichenkette ist die Summe der Informationsgehalte der einzelnen Zeichen
- Der Informationsgehalt eines vorhersagbaren Zeichens ist 0

Die Logarithmus-Funktion ist die einfachste Funktion zur Definition eines Informationsgehalts mit diesen Eigenschaften.

Definition – Information

Information besteht in der Unsicherheit, Veränderungen eines Signals vorhersagen zu können. Der Informationsgehalt eines Zeichens $x \in \mathcal{X}$ aus einem Alphabet $\mathcal{X}$ hängt von der Wahrscheinlichkeit $p(x)$ ab, dass das informationstragende Signal zum Beobachtungszeitpunkt den diesem Zeichen zugeordneten Wert bzw. Wertebereich annimmt. Der Informationsgehalt I des Zeichens x mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $p(x)$ ist definiert als

$$I(x) = -\log_2 p(x) \quad \text{mit} \quad [\,I\,] = \text{bit}.$$

Definition – Entropie

Den mittleren Informationsgehalt einer Quelle bezeichnet man als Entropie

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) I(x) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 \left(p(x)\right).$$

Hinweis: Die Schreibweisen $p(x)$ oder p_x verwenden wir manchmal als Kurzform von $\Pr[X = x]$.

Definition – Bedingte Entropie

Die bedingte Entropie zweier Zufallsvariablen X und Y

$$H(Y|X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) \sum_{y\in\mathcal{Y}} p(y|x) \log_2 p(y|x)$$

entspricht der verbleibenden Unsicherheit über Y, wenn X bekannt ist.

- Sind X und Y voneinander abhängig, dann ist die bedingte Entropie kleiner als im unabhängigen Fall.
- Sind X und Y voneinander unabhängig und ist der Ausgang von X bereits bekannt, so bleibt die Entropie von Y vollständig erhalten.

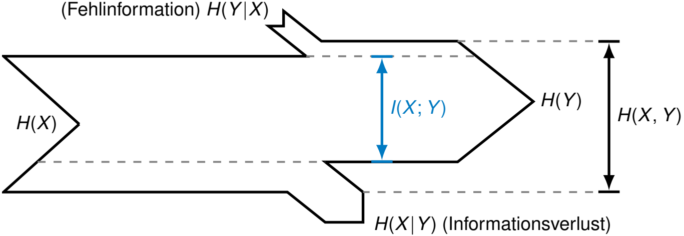
Definition – Verbundentropie

Sei $p(x,y)$ die Verbunddichte zweier Zufallsvariablen X und Y, d.h.

$$p(x,y) = \Pr[X = x | Y = y] \Pr[Y = y].$$

Dann ist die Verbundentropie $H(X,Y)$ definiert als

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y) \log_2 p(x,y).$$

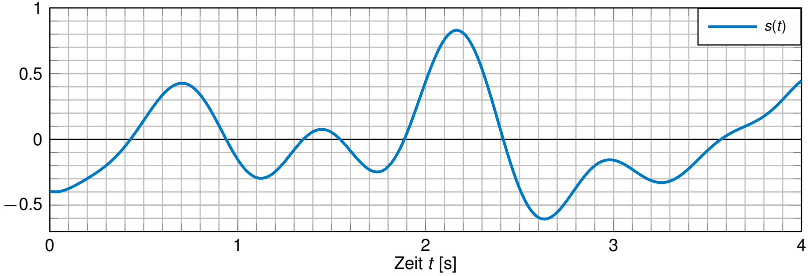


- Für die Entropie auf der Empfangsseite (Empfangsentropie) erhalten wir $H(Y) = H(X) - H(X|Y) + H(Y|X)$ (Sendeentropie abzüglich eines Informationsverlusts durch den Kanal zuzüglich der Fehlinformation).
- Die transportierte Information (Transinformation) entspricht der Sendeentropie abzüglich des Informationsverlusts bzw. der Empfangsentropie abzüglich der Fehlinformation.

Definition (Transinformation)
Die von Sender zu Empfänger über einen gedächtnislosen Kanal transportierte Information bezeichnet man als Transinformation (engl. Mutual Information)

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

Offene Fragen



- In welchen zeitlichen Abständen werden Samples genommen? (Zeitdiskretisierung)
- Bedeutet häufigeres Abtasten auch automatisch mehr Information? (Abtasttheorem)
- Wie werden kontinuierliche Signalwerte gerundet? (Quantisierung)
- Welche Abbildungs- / Interpretationsvorschriften gibt es? (Leitungskodierung)
- Welche Störfaktoren spielen eine Rolle? (Rauschen, Dämpfung, Verzerrung, . . .)
- Wie werden Fehler erkannt und ggf. korrigiert? (Kanalkodierung)
- Und wie wird ein derartiges Signal überhaupt erzeugt? (Impulsformung, Modulation)

Fourierreihe

Ein periodisches Signal $s(t)$ lässt sich als Summe gewichteter Sinus- und Kosinus-Schwingungen darstellen. Die so entstehende Reihenentwicklung von $s(t)$ bezeichnet man als Fourierreihe:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

Das k-te Summenglied bezeichnet man auch als k-te Harmonische. Das konstante Glied $a_0/2$ repräsentiert eine Verschiebung der Signalamplitude bezüglich der Ordinate (y-Achse) und damit den konstanten Anteil der Funktion. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ stellt lediglich eine Normierung bezüglich der Periodendauer T des Signals dar.

Die Koeffizienten (Gewichte) a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega t)\, \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

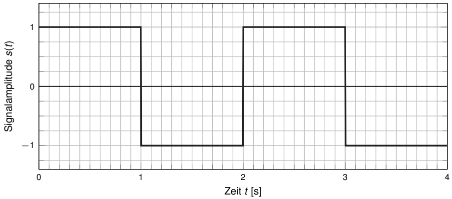
Fourier-Reihe

Hier eine Text-Videoerklärung was die Fourier-Reihe ist und wofür sie Verwendet wird:

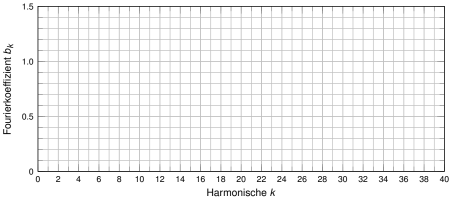
- Text: `https://t1p.de/fdav`
- Video: `https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY`

Fourierreihe

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$



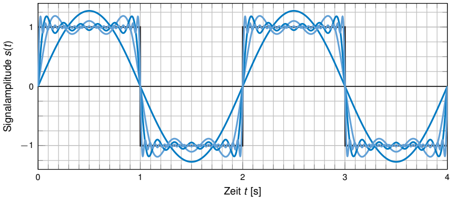
(b) Spektrum $S(f)$

Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2\,\mathrm{s}$)

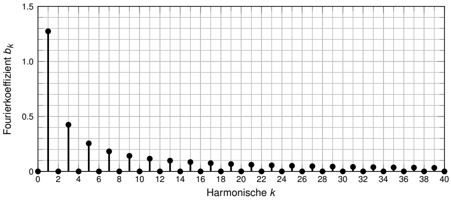
$$s(t) \approx \frac{a_0}{2}$$

Fourierreihe

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$



(b) Spektrum $S(f)$

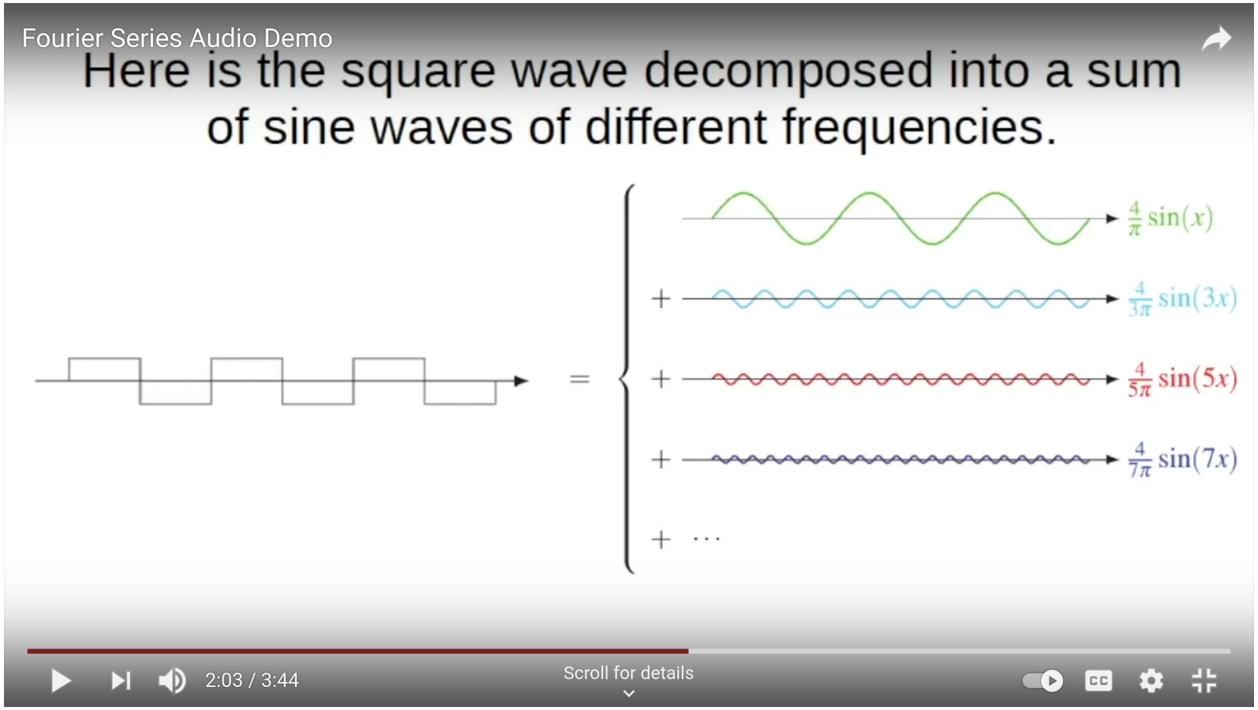
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2\,\mathrm{s}$)

Im Grenzwert $N \to \infty$ gilt:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

Fourier-Reihe - Rechtecksimpuls

Aufbau eines Rechtecksimpuls-Tonsignals aus Sinusschwingungen:



Quelle: `https://youtu.be/3IAMpH4xF9Q?t=92`

Das Signal $s(t)$ wird mittels des Einheitsimpulses (Dirac-Impulses) $\delta[t]$ in äquidistanten Abständen T_a (Abtastintervall) für $n \in \mathbb{Z}$ abgetastet:

$$\hat{s}(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_a], \text{ mit } \delta[t - nT_a] = \begin{cases} 1 & t = nT_a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\hat{s}(t)$ nur zu den Zeitpunkten nT_a für ganzzahlige n von Null verschieden ist, vereinbaren wir die Schreibweise $\hat{s}[n]$ für zeitdiskrete aber wertkontinuierliche Signale.

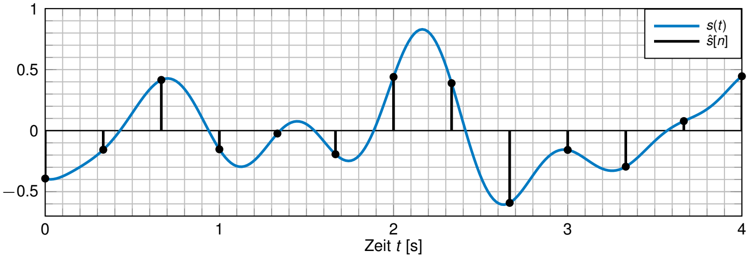


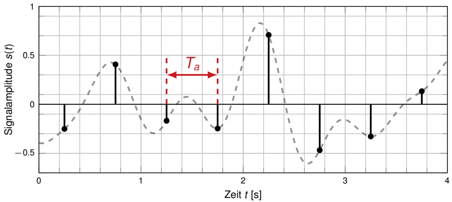
Abbildung 2: Zeitkontinuierliches Signal $s(t)$ und Abtastwerte $\hat{s}[n]$

Abtasttheorem von Shannon und Nyquist

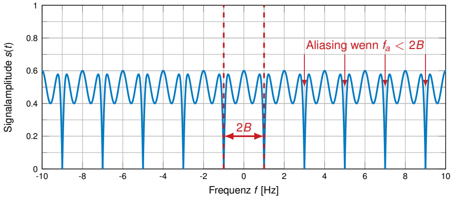
Ein auf $|f| \leq B$ bandbegrenztes Signal $s(t)$ ist vollständig durch äquidistante Abtastwerte $\hat{s}[n]$ beschrieben, sofern diese nicht weiter als $T_a \leq {}^1\!/_{2B}$ auseinander liegen. Die Abtastfrequenz, welche eine vollständige Signalrekonstruktion erlaubt, ist folglich durch

$$f_a > 2B$$

nach unten beschränkt.



(a) Abgetastetes Signal $\hat{s}[n]$



(b) Zugehöriges Spektrum $\hat{S}(f)$ (schematisch)

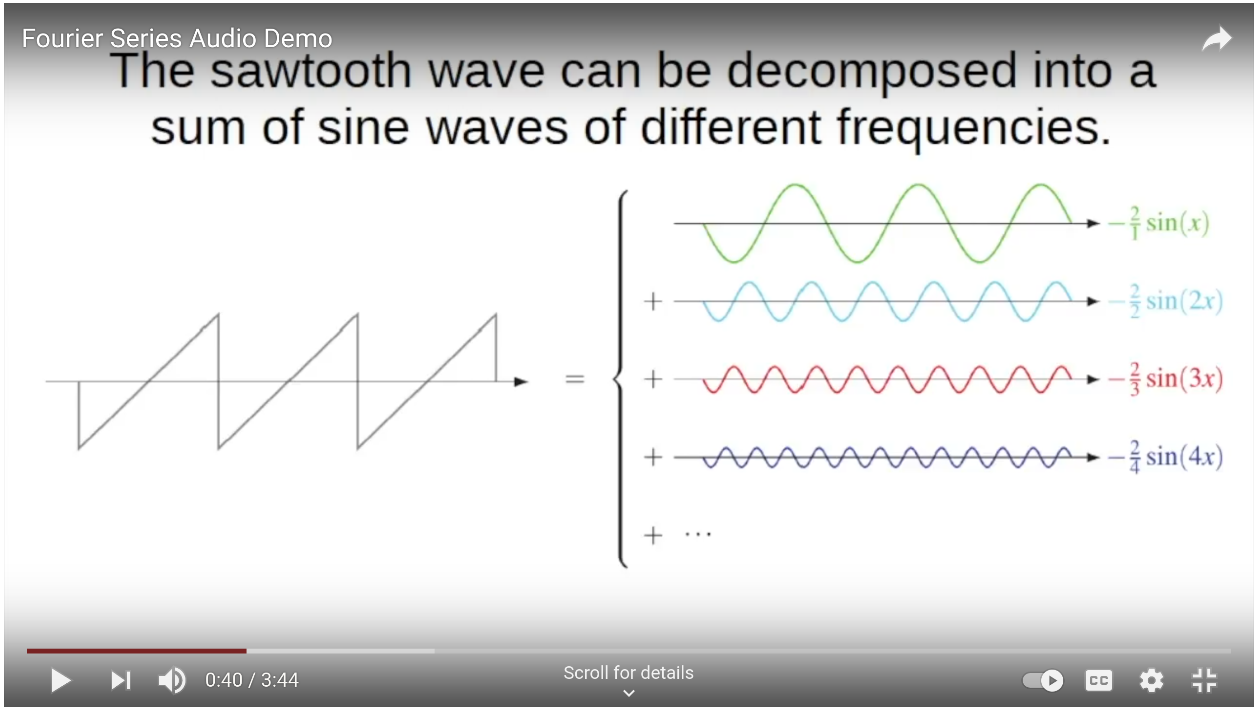
- Wählt man $f_a < 2B$, so überlappen sich die periodischen Wiederholungen des Spektrums
- Diesen Effekt bezeichnet man als Aliasing
- Eine verlustfreie Rekonstruktion ist in diesem Fall nicht möglich

Ablauf:

- Aufgabe 2
- Aufgabe 1

Fourier-Reihe - Sägezahnimpuls - Aufgabe 1

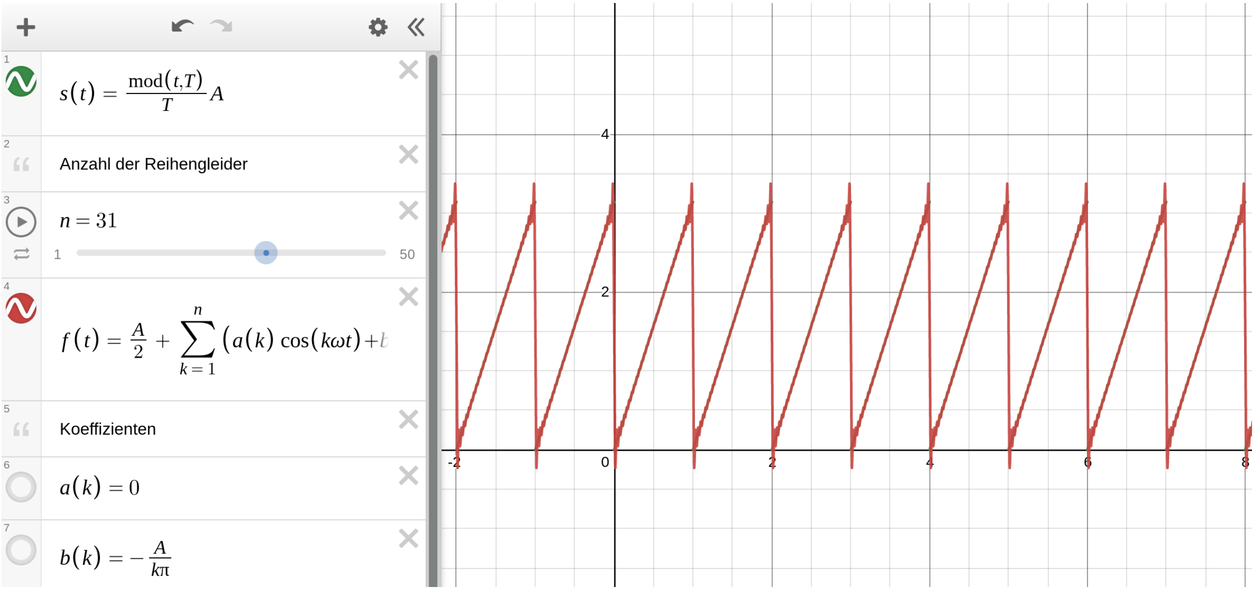
Aufbau eines Sägezahnimpuls-Tonsignals aus Sinusschwingungen:



Quelle: `https://youtu.be/3IAMpH4xF9Q?t=16`

Fourier-Reihe - Sägezahnimpuls - Aufgabe 1

Annäherung eines Sägezahnimpulses aus Sinusschwingungen:



Quelle: `https://www.desmos.com/calculator/fmb3evfzv6`

Studenten zählen

(Nur als Erinnerung für mich.)